Střežení muzea

Ivan Šedek

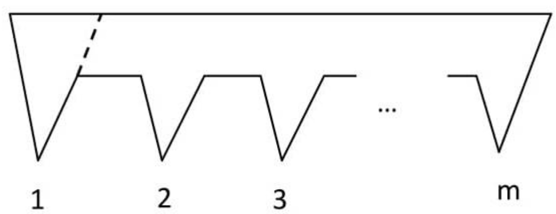
26. listopadu 2016

Předpokládejme, že ředitel muzea požaduje, aby byl každý kout muzea nepřetržitě sledován strážcem. Strážci jsou rozmístěni na pevně určených místech, nemohou se pohybovat, ale mohou se libovolně otáčet. Kolik strážců je potřeba?

Půdorys muzea si můžeme zobrazit jako mnohoúhelník s n stranami. Je-li půdorys muzea ve tvaru konvexního mnohoúhelníku, pak stačí jediný strážce, který může být umístěn v kterémkoliv místě. Půdorys muzea však může být tvořen libovolným uzavřeným mnohoúhelníkem.

Uzavřeným mnohoúhelníkem se rozumí ve shodě s [2] rovinný obrazec ohraničený konečným řetězcem úseček uzavřeným do smyčky (tzv. uzavřený řetězec, neboli obvod) obsahující, jak obvod, tak část roviny omezenou tímto řetězcem (vnitřek mnohoúhelníku).

Uvažujme muzeum s půdorysem ve tvaru hřebene s $n = 3m$ stěnami:



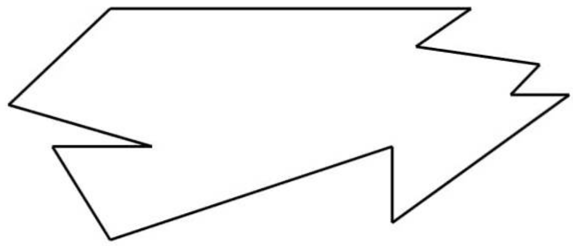
Je zřejmé, že takový půdorys vyžaduje $m = \frac{n}{3}$ strážců. Má-li strážce sledovat bod 1, tak musí stát někde v trojúhelníku, který je omezen čárkovanou linkou. Podobné trojúhelníky lze vymezit pro střežení bodů $2, 3, \cdots, m$. Tyto trojúhelníky jsou disjunktní. Z toho můžeme usoudit, že je potřeba m strážců. m strážců je ale také dostatečný počet, protože umístíme-li strážce na horní stranu trojúhelníků, tak strážci mohou sledovat i ostatní nepokryté části zdí.

Odstraníme-li jednu nebo dvě zdi na konci a s nimi i posledního strážce, můžeme usoudit, že pro každé n vyžaduje muzeum s n stěnami $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ strážců.

Na základě takových úvah byla vyslovena následující věta známá pod názvem *Art Gallery Theorem.*

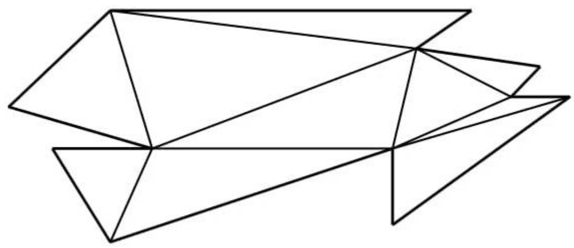
Věta 1 *Pro každé muzeum s n stěnami stačí* $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ *strážců.*

Důkaz Mějme muzeum s 12 stěnami.



Jeho půdorys rozdělíme vnitřními úhlopříčkami tak, aby se uhlopříčky nekřížily. Použijeme tolik uhlopříček, kolik je potřeba k tomu, aby byl celý vnitřek rozdělen na trojúhelníky. Mnohoúhelník na obrázku se takto rozdělí pomocí devíti uhlopříček. Pro úplné rozdělení mnohoúhelníku na trojúhelníky se používá termín *triangulace*. Rozdělení na trojúhelníky není jednoznačné, avšak nezáleží na tom, které rozdělení se zvolí.

Nyní si představme rozdělený mnohoúhelník jako neorientovaný graf, ve kterém jsou rohy místností vrcholy a stěny společně s diagonálami hranami grafu.



Tvrzení 1 *Tento graf lze obarvit třemi barvami.*

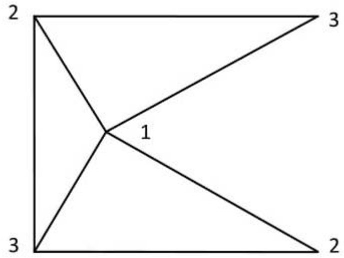
Obarvením grafu se rozumí použití minimálního počtu barev k obarvení vrcholů grafu takovým způsobem, že žádná hrana nespojuje vrcholy stejné barvy.

Pro $n = 3$ je Tvrzení 1 zřejmě platné. Vrcholy v grafu, který obsahuje n-úhelník, ve kterém je $n > 3$, obarvíme tak, že zvolíme dva libovolné vrcholy u a v, které jsou spojeny uhlopříčkou. Hrana uv dělí graf na dva menší grafy, které oba obsahují tuto uhlopříčku a jsou rozděleny na trojúhelníky. Vrchol u obarvíme barvou 1 a vrchol v barvou 2. Hrana uv je stranou dvou trojúhelníků, jejichž třetí vrchol označíme barvou 3. Pokud některá strana v trojúhelníku, který má obarveny všechny vrcholy je současně stranou jiného trojúhelníku doplníme na jeho třetí vrchol tu barvu, která na jeho dvou vrcholech dosud není. Takto postupně obarvíme všechny vrcholy n-úhelníku a stačí nám k tomu tři barvy.

Strážce nyní umístíme na vrcholy jedné barvy a to té, jejíž počet vrcholů je maximálně $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Jsou-li to například vrcholy barvy 1 a vrchol této barvy obsahuje každý trojúhelník v n-úhelníku, lze z toho usoudit, že každý trojúhelník je střežen. Strážce stojící na vrcholu trojúhelníku má pod kontrolou minimálně celý trojúhelník.

□

Příklad: Pětiúhelník



Na obrázku je pětiúhelník rozdělený dvěma úhlopříčkami na tři trojúhelníky. Po obarvení grafu je jeden vrchol barvy 1 a po dvou vrcholech barvy 2 a 3. Protože je $\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$, umístíme jednoho strážce do vrcholu barvy 1.

Slabým místem výše uvedené argumentace může být otázka, zda lze opravdu každý mnohoúhelník zcela rozdělit na trojúhelníky. Podezření vzbuzuje především ta skutečnost, že nelze triangulaci rozšířit do třírozměrného prostoru. V třírozměrném prostoru by mělo být možné rozložit každý mnohostěn na čtyřstěny. Existují však mnohostěny, u kterých takový rozklad není možný.

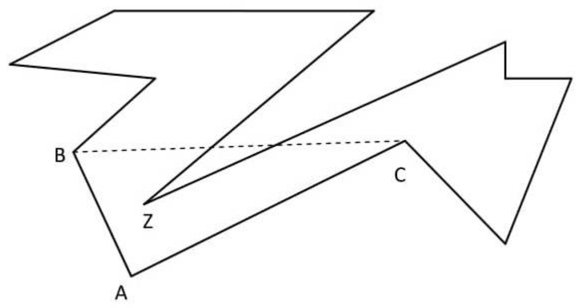
Příkladem může být *Schönhardtův mnohostěn*. Ten vznikne z trojbokého hranolu tak, že se horní trojúhelník vůči podstavě pootočí. Boční stěny hranolu se prolomí v úhlopříčce a vzniknou stěny dvě, které spolu svírají vnitřní úhel větší, než 180^0.

Zatímco trojboký hranol lze bez problémů rozložit na dva čtyřstěny, které mají základnu v podstavě, případně v horní stěně a čtvrtý vrchol v protější stěně, Schönhardtův mnohostěn takto rozložit nelze. Čtyřstěn sice může mít základnu v podstavě hranolu a čtvrtý vrchol v protější stěně, ale takový čtyřstěn není zcela obsažen v mnohostěnu. Triangulace tohoto mnohostěnu tedy není možná bez přidání dalších vrcholů.

Je třeba tedy ještě dokázat, že i nekonvexní mnohoúhelníky lze vždy zcela rozložit na trojúhelníky. To lze dokázat indukcí na n vrcholů. Pro $n = 3$ se jedná o trojúhelník a není tedy co dokazovat. Mějme $n \geq 4$. Pak stačí dokázat, že můžeme nakreslit jednu úhlopříčku tak, že rozdělíme mnohoúhelník na takové dvě menší části, že triangulaci mnohoúhelníku můžeme sestavit z triangulace jeho částí.

Vrchol, jehož vnitřní úhel mnohoúhelníku je menší, než 180^0, nazveme *konvexní vrchol*. K tomu, aby se mnohoúhelník dal rozdělit na dvě triangulovatelné části, je třeba, aby měl alespoň jeden konvexní vrchol. To lze dokázat pomocí Dirichletova principu. Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníku o n vrcholech je $(n-2)180^0$. $(n-3)$ úhlů nekonvexních vrcholů spotřebuje tolik ze součtu, že na poslední tři úhly zbývá méně, než 180^0. To znamená, že nejméně tři vrcholy mnohoúhelníku musí být konvexní.

Lze si také představit konvexní obal mnohoúhelníku. Vrcholy konvexního obalu jsou všechny konvexní a současně jsou společné pro konvexní obal i pro mnohoúhelník.



Nyní uvažujme dva blízké vrcholy B, C na obrázku. Je-li úsečka BC celá obsažena v mnohoúhelníku, pak je to naše dělící uhlopříčka. Když ne, tak trojúhelník ABC obsahuje ještě jiný vrchol. Posuňme úsečku BC směrem k vrcholu A tak, aby na ní ležel vrchol Z ležící uvnitř trojúhelníku ABC. Pak úsečka AZ je vnitřní a je tou dělící uhlopříčkou.

Art Gallery Theorem má mnoho dalších variant. Zvlášť hezká je tato:

Předpokládejme, že se strážci mohou pohybovat; každý podle jedné stěny muzea a přitom se může libovolně rozhlížet. Strážce tedy vidí vše, co lze vidět z každého bodu "jeho"zdi. Kolik takových strážců potřebujeme k tomu, aby bylo střeženo celé muzeum?

V době, kdy byla kniha [1] sepsána, byla tato úloha dosud nevyřešena. Profesor Godfried Toussaint zkonstruoval příklad muzea, který ukazuje, že by mohlo stačit $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ chodících strážců. Lze odhadovat, že je takový počet dostatečný s výjimkou malých hodnot n.

Zdroj. Zpracováno podle knihy [1], kapitola 31, How to guard a museum.

Reference

[1] Martin Aigner, Günter M.Ziegler, Proofs from THE BOOK

[2] Wikipedia, The Free Encyclopedia, heslo Polygon