# Zápis čísel
# aneb
# *Jeden za osmnáct a druhý bez dvou za dvacet*

Ľubomíra Balková & Edita Pelantová

Katedra matematiky, FJFI, ČVUT

září 2008

**Počátky přirozených čísel**:

**Počátky přirozených čísel**:

- Kroenecker: *God made the integers; everything else is the work of man.*

**Počátky přirozených čísel**:

- Kroenecker: *God made the integers; everything else is the work of man.*
- slova pro počítání věcí (už v době kamenné)

**Počátky přirozených čísel**:

- Kroenecker: *God made the integers; everything else is the work of man.*
- slova pro počítání věcí (už v době kamenné)

**Počátky zápisu přirozených čísel**:

**Počátky přirozených čísel**:

- Kroenecker: *God made the integers; everything else is the work of man.*
- slova pro počítání věcí (už v době kamenné)

**Počátky zápisu přirozených čísel**:

- pomocí konečného počtu symbolů (Egypt 1500 př. n. l.)

**Počátky přirozených čísel**:

- Kroenecker: *God made the integers; everything else is the work of man.*
- slova pro počítání věcí (už v době kamenné)

**Počátky zápisu přirozených čísel**:

- pomocí konečného počtu symbolů (Egypt 1500 př. n. l.)

$$276 = \varrho\varrho \cap\cap\cap\cap\cap\cap\cap \mathit{IIIIII}$$

**Počátky přirozených čísel**:

- Kroenecker: *God made the integers; everything else is the work of man.*
- slova pro počítání věcí (už v době kamenné)

**Počátky zápisu přirozených čísel**:

- pomocí konečného počtu symbolů (Egypt 1500 př. n. l.)

$$276 = \varrho\varrho \cap\cap\cap\cap\cap\cap\cap \mathit{IIIIII}$$

- nula = "nevyskytuje se" (Babylonie 700 př. n. l.)

**Počátky přirozených čísel**:

- Kroenecker: *God made the integers; everything else is the work of man.*
- slova pro počítání věcí (už v době kamenné)

**Počátky zápisu přirozených čísel**:

- pomocí konečného počtu symbolů (Egypt 1500 př. n. l.)

$$276 = \varrho\varrho \cap\cap\cap\cap\cap\cap\cap \mathit{IIIIII}$$

- nula = "nevyskytuje se" (Babylonie 700 př. n. l.)
- nula jako číslo (Indie 628 – Brahmagupta),

**Počátky přirozených čísel**:

- Kroenecker: *God made the integers; everything else is the work of man.*
- slova pro počítání věcí (už v době kamenné)

**Počátky zápisu přirozených čísel**:

- pomocí konečného počtu symbolů (Egypt 1500 př. n. l.)

$$276 = \varrho\varrho \cap\cap\cap\cap\cap\cap\cap \mathit{IIIIII}$$

- nula = “nevyskytuje se” (Babylonie 700 př. n. l.)
- nula jako číslo (Indie 628 – Brahmagupta), arabské číslice se vyvinuly z indických

**Počátky přirozených čísel**:

- Kroenecker: *God made the integers; everything else is the work of man.*
- slova pro počítání věcí (už v době kamenné)

**Počátky zápisu přirozených čísel**:

- pomocí konečného počtu symbolů (Egypt 1500 př. n. l.)

$$276 = \varrho\varrho \cap\cap\cap\cap\cap\cap\cap \mathit{IIIIII}$$

- nula = "nevyskytuje se" (Babylonie 700 př. n. l.)
- nula jako číslo (Indie 628 – Brahmagupta), arabské číslice se vyvinuly z indických
- francouzština - relikty 60-kové a 20-kové soustavy

**Dnešní přednáška**:

**Dnešní přednáška**:

$$\langle 18\rangle_{10} = \langle 10010\rangle_2 = \langle 200\rangle_3 = \langle 101000\rangle_F$$

**Dnešní přednáška**:

$$\langle 18\rangle_{10} = \langle 10010\rangle_2 = \langle 200\rangle_3 = \langle 101000\rangle_F$$

$$\langle 2\overline{2}\rangle_{10} = \langle 101\overline{1}0\rangle_2 = \langle 1\overline{1}00\rangle_3 = \langle 110\overline{1}00\rangle_F$$

# Program

# Program

- původ: 10 prstů

- původ: 10 prstů
- Leonardo Pisánský (1170-1250): "Devatero znaků indických je $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, těmito devíti znaky a znakem 0, který se arabsky zefír nazývá, se dá zapsat každé číslo."

- původ: 10 prstů
- Leonardo Pisánský (1170-1250): “Devatero znaků indických je $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, těmito devíti znaky a znakem 0, který se arabsky zefír nazývá, se dá zapsat každé číslo.”
- desítková soustava:
  mocniny deseti a *cifry* nebo *číslice* $0, 1, 2, \ldots, 9$

- původ: 10 prstů
- Leonardo Pisánský (1170-1250): "Devatero znaků indických je $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, těmito devíti znaky a znakem 0, který se arabsky zefír nazývá, se dá zapsat každé číslo."
- desítková soustava:
  mocniny deseti a *cifry* nebo *číslice* $0, 1, 2, \ldots, 9$
- 3030 nebo také $\langle 3030 \rangle_{10}$ je zápis čísla
  $3 \times$ tisíc $+ \, 0 \times$ sto $+ \, 3 \times$ deset $+ \, 0 \times$ jedna

- původ: 10 prstů
- Leonardo Pisánský (1170-1250): "Devatero znaků indických je $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, těmito devíti znaky a znakem 0, který se arabsky zefír nazývá, se dá zapsat každé číslo."
- desítková soustava:
  mocniny deseti a *cifry* nebo *číslice* $0, 1, 2, \ldots, 9$
- 3030 nebo také $\langle 3030 \rangle_{10}$ je zápis čísla
  $3 \times$ tisíc $+ 0 \times$ sto $+ 3 \times$ deset $+ 0 \times$ jedna
- hodnota cifry závisí na její poloze v zápisu

- původ: 10 prstů
- Leonardo Pisánský (1170-1250): "Devatero znaků indických je $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, těmito devíti znaky a znakem 0, který se arabsky zefír nazývá, se dá zapsat každé číslo."
- desítková soustava:
  mocniny deseti a *cifry* nebo *číslice* $0, 1, 2, \dots, 9$
- 3030 nebo také $\langle 3030 \rangle_{10}$ je zápis čísla
  $3 \times$ tisíc $+ 0 \times$ sto $+ 3 \times$ deset $+ 0 \times$ jedna
- hodnota cifry závisí na její poloze v zápisu $\Rightarrow$ desítková soustava je *poziční*

- uvažujme cifry $\overline{9}, \overline{8}, \dots, \overline{1}, 0, 1, \dots, 8, 9$

- uvažujme cifry $\overline{9}, \overline{8}, \ldots, \overline{1}, 0, 1, \ldots, 8, 9$
- zápis v desítkové soustavě s takovými ciframi nejednoznačný

$$18 = 2\overline{2}$$

- uvažujme cifry $\overline{9}, \overline{8}, \ldots, \overline{1}, 0, 1, \ldots, 8, 9$
- zápis v desítkové soustavě s takovými ciframi nejednoznačný

$$18 = 2\overline{2} = 2 \cdot 10^1 - 2 \cdot 10^0$$

- uvažujme cifry $\overline{9}, \overline{8}, \ldots, \overline{1}, 0, 1, \ldots, 8, 9$
- zápis v desítkové soustavě s takovými ciframi nejednoznačný

$$18 = 2\overline{2} = 2 \cdot 10^1 - 2 \cdot 10^0$$

- ověřte, že pro cifry $\overline{4}, \ldots, \overline{1}, 0, 1, \ldots, 4, 5$ už zápis jednoznačný,

- uvažujme cifry $\overline{9}, \overline{8}, \ldots, \overline{1}, 0, 1, \ldots, 8, 9$
- zápis v desítkové soustavě s takovými ciframi nejednoznačný

$$18 = 2\overline{2} = 2 \cdot 10^1 - 2 \cdot 10^0$$

- ověřte, že pro cifry $\overline{4}, \ldots, \overline{1}, 0, 1, \ldots, 4, 5$ už zápis jednoznačný, nazývá se *balancovaná desítková soustava*

- uvažujme cifry $\overline{9}, \overline{8}, \dots, \overline{1}, 0, 1, \dots, 8, 9$
- zápis v desítkové soustavě s takovými ciframi nejednoznačný

$$18 = 2\overline{2} = 2 \cdot 10^1 - 2 \cdot 10^0$$

- ověřte, že pro cifry $\overline{4}, \dots, \overline{1}, 0, 1, \dots, 4, 5$ už zápis jednoznačný, nazývá se *balancovaná desítková soustava*
- snazší násobení - stačí malá násobilka do $5 \times 5$

- uvažujme cifry $\overline{9}, \overline{8}, \dots, \overline{1}, 0, 1, \dots, 8, 9$
- zápis v desítkové soustavě s takovými ciframi nejednoznačný

$$18 = 2\overline{2} = 2 \cdot 10^1 - 2 \cdot 10^0$$

- ověřte, že pro cifry $\overline{4}, \dots, \overline{1}, 0, 1, \dots, 4, 5$ už zápis jednoznačný, nazývá se *balancovaná desítková soustava*
- snazší násobení - stačí malá násobilka do $5 \times 5$

$$14\overline{1} \times 1\overline{3} = \begin{array}{cccc} & 1 & 4 & \overline{1} \\ & & 1 & \overline{3} \\ \hline & \overline{4} & \overline{2} & 3 \\ 1 & 4 & \overline{1} & \\ \hline 1 & 0 & \overline{3} & 3 \end{array} \qquad 139 \times 7 = 973$$

# Program

John COLSON (1680–1760)

- cíl: urychlení aritmetických operací - hlavně násobení

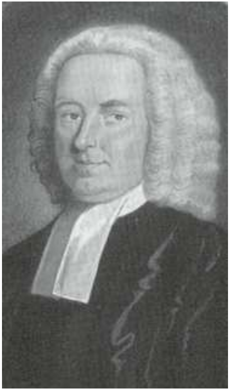
John COLSON (1680–1760)

- cíl: urychlení aritmetických operací - hlavně násobení

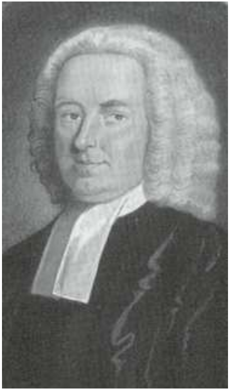
Augustin Louis CAUCHY (1789–1857)

- cíl: předcházení chybám ve výpočtech

# **John COLSON** (1680–1760)

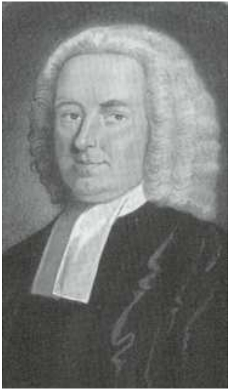


## **John COLSON** (1680–1760)



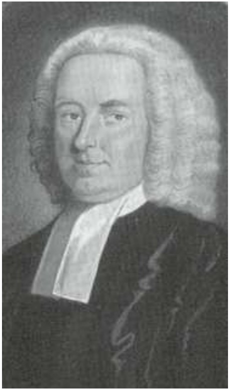
- profesor matematiky na Cambridge University

## **John COLSON** (1680–1760)



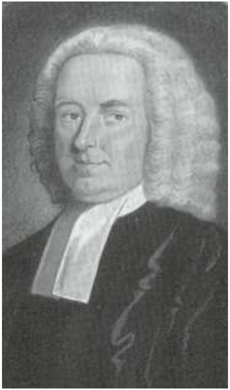
- profesor matematiky na Cambridge University
- známější jako překladatel – angličtina, latina, italština, francouzština (Newtonovo dílo z L do A)

## **John COLSON** (1680–1760)



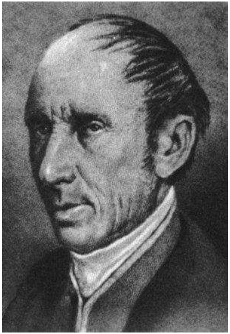
- profesor matematiky na Cambridge University
- známější jako překladatel – angličtina, latina, italština, francouzština (Newtonovo dílo z L do A)
- vysvětlující komentáře k překladům

## **John COLSON** (1680–1760)

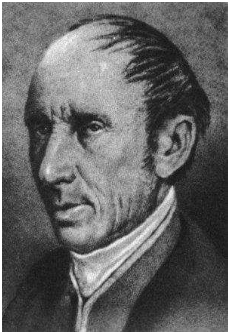


- profesor matematiky na Cambridge University
- známější jako překladatel – angličtina, latina, italština, francouzština (Newtonovo dílo z L do A)
- vysvětlující komentáře k překladům
- snaha zpřístupnit počty ženám

## **Augustin Louis CAUCHY** (1789–1857)

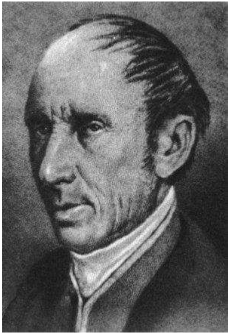


## **Augustin Louis CAUCHY** (1789–1857)



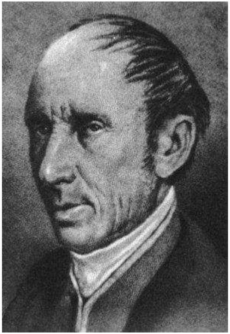
- silný katolík, přívrženec Bourbonů, kongregace (jezuité)

## **Augustin Louis CAUCHY** (1789–1857)



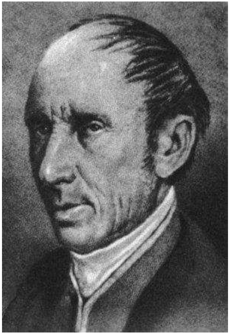
- silný katolík, přívrženec Bourbonů, kongregace (jezuité)
- profesor na Ecole Polytechnique - Cours d'analyse (1821): limita, spojitost, derivace, integrál, funkce komplexní proměnné, řešení diferenciálních rovnic

## **Augustin Louis CAUCHY** (1789–1857)



- silný katolík, přívrženec Bourbonů, kongregace (jezuité)
- profesor na Ecole Polytechnique - Cours d'analyse (1821): limita, spojitost, derivace, integrál, funkce komplexní proměnné, řešení diferenciálních rovnic
- učitel vnuka Karla X. (pobyt v Praze 1833-35)

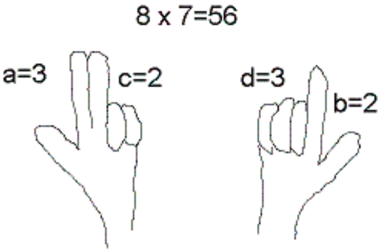
## **Augustin Louis CAUCHY** (1789–1857)



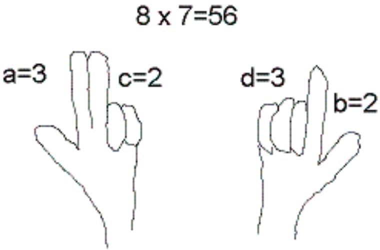
- silný katolík, přívrženec Bourbonů, kongregace (jezuité)
- profesor na Ecole Polytechnique - Cours d'analyse (1821): limita, spojitost, derivace, integrál, funkce komplexní proměnné, řešení diferenciálních rovnic
- učitel vnuka Karla X. (pobyt v Praze 1833-35)
- 789 článků (více jen Euler a Caley)

# Program

## Násobení ve středověku

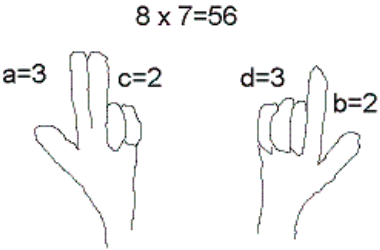


## Násobení ve středověku



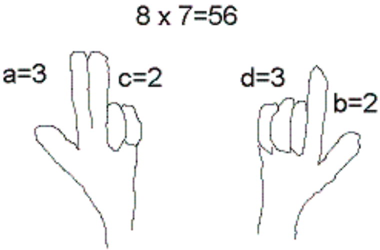

- vztyčené prsty $a$, $b$

## Násobení ve středověku




- vztyčené prsty $a, b$
- schované prsty $c, d$

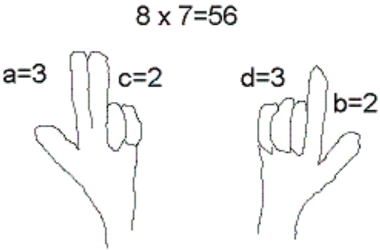
## Násobení ve středověku




- vztyčené prsty $a, b$
- schované prsty $c, d$

$$
\begin{aligned}
(10-c)(10-d) &= 100-(c+d)10+cd \\
&= 10(10-c-d)+cd \\
&= 10(a+b)+cd
\end{aligned}
$$

## Násobení ve středověku




- vztyčené prsty $a, b$
- schované prsty $c, d$

$$
\begin{aligned}
(10-c)(10-d) &= 100-(c+d)10+cd \\
&= 10(10-c-d)+cd \\
&= 10(a+b)+cd
\end{aligned}
$$

Římský zápis čísel $IV, \; IX, \; XC$

# Program

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu b* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \ldots, b-1$)

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu b* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \ldots, b-1$)
- $b := 3$,

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu $b$* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \ldots, b-1$)
- $b := 3$,
  každé $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0$,
  kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$,

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu b* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \ldots, b-1$)
- $b := 3$,
  každé $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0$,
  kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$,
  píšeme pak $n = \langle a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 \rangle_3$

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu b* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \dots, b-1$)
- $b := 3$,
  každé $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0$,
  kde cifry $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$,
  píšeme pak $n = \langle a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 \rangle_3$
  Jak zápis získat?

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu b* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \ldots, b-1$)
- $b := 3$,
  každé $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0$,
  kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$,
  píšeme pak $n = \langle a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 \rangle_3$
  Jak zápis získat?
  $\overbrace{\underline{\ 1\ }}, \overbrace{\underline{\ 3\ }}, \overbrace{\underline{\ 9\ }}, \overbrace{\underline{27}}, \overbrace{\underline{81}}, \overbrace{\underline{243}}, \overbrace{\underline{729}}, \ldots$

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu b* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \ldots, b-1$)
- $b := 3$,
  každé $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0$,
  kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$,
  píšeme pak $n = \langle a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 \rangle_3$
  Jak zápis získat?
  $\overbrace{\underline{\ 1\ }}, \overbrace{\underline{\ 3\ }}, \overbrace{\underline{\ 9\ }}, \overbrace{\underline{27}}, \overbrace{\underline{81}}, \overbrace{\underline{243}}, \overbrace{\underline{729}}, \ldots$

$$999 \quad = \quad \mathbf{1} \cdot 729 + 170$$

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu b* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \dots, b-1$)
- $b := 3$,
  každé $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0$,
  kde cifry $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$,
  píšeme pak $n = \langle a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 \rangle_3$
  Jak zápis získat?
  $\overbrace{\underline{\ 1\ }}, \overbrace{\underline{\ 3\ }}, \overbrace{\underline{\ 9\ }}, \overbrace{\underline{\ 27\ }}, \overbrace{\underline{\ 81\ }}, \overbrace{\underline{243}}, \overbrace{\underline{729}}, \dots$

$$999 = \mathbf{1} \cdot 729 + 170$$
$$170 = \mathbf{2} \cdot 81 + 8$$

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu b* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \ldots, b-1$)
- $b := 3$,
  každé $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0$,
  kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$,
  píšeme pak $n = \langle a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 \rangle_3$
  Jak zápis získat?
  $\overbrace{\underline{\ 1\ }}, \overbrace{\underline{\ 3\ }}, \overbrace{\underline{\ 9\ }}, \overbrace{\underline{\ 27\ }}, \overbrace{\underline{\ 81\ }}, \overbrace{\underline{243}}, \overbrace{\underline{729}}, \ldots$

$$999 = \mathbf{1} \cdot 729 + 170$$
$$170 = \mathbf{2} \cdot 81 + 8$$
$$8 = \mathbf{2} \cdot 3 + 2$$

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu b* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \dots, b-1$)
- $b := 3$,
  každé $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0$,
  kde cifry $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$,
  píšeme pak $n = \langle a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 \rangle_3$
  Jak zápis získat?
  $\overbrace{\underline{\ 1\ }}, \overbrace{\underline{\ 3\ }}, \overbrace{\underline{\ 9\ }}, \overbrace{\underline{\ 27\ }}, \overbrace{\underline{\ 81\ }}, \overbrace{\underline{243}}, \overbrace{\underline{729}}, \dots$

$$999 = \mathbf{1} \cdot 729 + 170$$
$$170 = \mathbf{2} \cdot 81 + 8$$
$$8 = \mathbf{2} \cdot 3 + 2$$
$$2 = \mathbf{2} \cdot 1$$

= způsob zápisu čísel pomocí konečného počtu cifer, přičemž hodnota cifry závisí na její pozicí v zápisu čísla

- nejčastější: *poziční soustava o pevném základu b* (mocniny $b$ a cifry $0, 1, \ldots, b-1$)
- $b := 3$,
  každé $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0$,
  kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$,
  píšeme pak $n = \langle a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 \rangle_3$
  Jak zápis získat?
  $\overbrace{\underline{\ 1\ }}, \overbrace{\underline{\ 3\ }}, \overbrace{\underline{\ 9\ }}, \overbrace{\underline{\ 27\ }}, \overbrace{\underline{\ 81\ }}, \overbrace{\underline{243}}, \overbrace{\underline{729}}, \ldots$

$$999 = \mathbf{1} \cdot 729 + 170$$
$$170 = \mathbf{2} \cdot 81 + 8$$
$$8 = \mathbf{2} \cdot 3 + 2$$
$$2 = \mathbf{2} \cdot 1$$

$$999 = \langle 1020022 \rangle_3$$

# Program

**Otázka**: Která báze $b$ je nejvhodnější?

**Otázka**: Která báze $b$ je nejvhodnější?

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1, \ldots, b-1\}$

**Otázka**: Která báze $b$ je nejvhodnější?

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1, \ldots, b-1\}$

- $b$ malé: malý počet cifer, ale dlouhý zápis

**Otázka**: Která báze $b$ je nejvhodnější?

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1, \ldots, b-1\}$

- $b$ malé: malý počet cifer, ale dlouhý zápis
- $b$ velké: krátký zápis, ale hodně cifer

**Otázka**: Která báze $b$ je nejvhodnější?

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1, \ldots, b-1\}$

- $b$ malé: malý počet cifer, ale dlouhý zápis
- $b$ velké: krátký zápis, ale hodně cifer

- uvažujme zápisy délky $r$, máme cifry $\{0, 1, \ldots, b-1\}$

$$\underbrace{\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{\text{b-1}}\boxed{\text{b-1}}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{\text{b-2}}\boxed{2}\boxed{1}}_{r}$$

zapíšeme tak $b^r$ čísel

**Otázka**: Která báze $b$ je nejvhodnější?

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1, \ldots, b-1\}$

- $b$ malé: malý počet cifer, ale dlouhý zápis
- $b$ velké: krátký zápis, ale hodně cifer
- uvažujme zápisy délky $r$, máme cifry $\{0, 1, \ldots, b-1\}$

$$\underbrace{\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{\text{b-1}}\boxed{\text{b-1}}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{\text{b-2}}\boxed{2}\boxed{1}}_{r}$$

  zapíšeme tak $b^r$ čísel
- cíl: minimalizovat $b \cdot r$ při $b^r = Const.$

**Otázka**: Která báze $b$ je nejvhodnější?

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1, \ldots, b-1\}$

- $b$ malé: malý počet cifer, ale dlouhý zápis
- $b$ velké: krátký zápis, ale hodně cifer
- uvažujme zápisy délky $r$, máme cifry $\{0, 1, \ldots, b-1\}$

$$\underbrace{\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{b\text{-}1}\boxed{b\text{-}1}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{b\text{-}2}\boxed{2}\boxed{1}}_{r}$$

  zapíšeme tak $b^r$ čísel
- cíl: minimalizovat $b \cdot r$ při $b^r = Const.$

$$f(x) = x \cdot r = x \cdot \frac{const.}{\ln x}$$

**Otázka**: Která báze $b$ je nejvhodnější?

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1, \ldots, b-1\}$

- $b$ malé: malý počet cifer, ale dlouhý zápis
- $b$ velké: krátký zápis, ale hodně cifer
- uvažujme zápisy délky $r$, máme cifry $\{0, 1, \ldots, b-1\}$

$$\underbrace{\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{\text{b-1}}\boxed{\text{b-1}}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{\text{b-2}}\boxed{2}\boxed{1}}_{r}$$

  zapíšeme tak $b^r$ čísel
- cíl: minimalizovat $b \cdot r$ při $b^r = Const.$

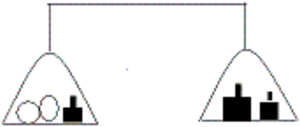
$$f(x) = x \cdot r = x \cdot \frac{const.}{\ln x}$$

**Řešení**: Minimum pro Eulerovo číslo $e = 2,7182818284\ldots$, tedy mezi celočíselnými bázemi optimální $b = 3$.

**Otázka**: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \dots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?

**Otázka**: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?

Tři závaží nestačí!



**Otázka**: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?

Tři závaží nestačí!

**Řešení**: $1, 3, 9, 27.$

**Otázka**: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?

Tři závaží nestačí!

**Řešení**: $1, 3, 9, 27$.

$5 = 9 - 3 - 1$

**Otázka**: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?

Tři závaží nestačí!

**Řešení**: $1, 3, 9, 27$.

$5 = 9 - 3 - 1$
$18 = 27 - 9$

**Otázka**: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?

Tři závaží nestačí!

**Řešení**: $1, 3, 9, 27$.

$5 = 9 - 3 - 1$
$18 = 27 - 9$

**Theorem**

*Každé přirozené číslo n lze zapsat jednoznačně jako*

$$n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0,$$

*kde* $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{-1, 0, 1\}$.

# Program

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry 0 a 1

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry 0 a 1
- binární soustava "násobení = sčítání"

$$1011 \times 101 = \begin{array}{cccccc} & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry 0 a 1
- binární soustava "násobení = sčítání"

$$1011 \times 101 = \begin{array}{cccccc} & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

- rychlost násobení $\sim$ počet jedniček v binárním zápisu

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15
- vybereme zápis s maximálním počtem nul

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15
- vybereme zápis s maximálním počtem nul
  - nevyskytují se dvě nenuly vedle sebe

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15
- vybereme zápis s maximálním počtem nul
  - nevyskytují se dvě nenuly vedle sebe

$$0111110 \rightarrow 10000\overline{1}$$

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15
- vybereme zápis s maximálním počtem nul
  - nevyskytují se dvě nenuly vedle sebe

$$0111110 \to 10000\overline{1} \qquad 1\overline{1} \to 01$$

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15
- vybereme zápis s maximálním počtem nul
  - nevyskytují se dvě nenuly vedle sebe

$$0111110 \to 10000\overline{1} \qquad 1\overline{1} \to 01$$

- $n \to b_0(n) :=$ počet nenul ve standardním binárním zápisu,

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15
- vybereme zápis s maximálním počtem nul
  - nevyskytují se dvě nenuly vedle sebe

$$0111110 \rightarrow 10000\overline{1} \qquad 1\overline{1} \rightarrow 01$$

- $n \rightarrow b_0(n) :=$ počet nenul ve standardním binárním zápisu,
  $n \rightarrow b_r(n) :=$ počet nenul v minimálním balancovaném binárním zápisu

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15
- vybereme zápis s maximálním počtem nul
  - nevyskytují se dvě nenuly vedle sebe

$$0111110 \to 10000\overline{1} \qquad 1\overline{1} \to 01$$

- $n \to b_0(n) :=$ počet nenul ve standardním binárním zápisu,
  $n \to b_r(n) :=$ počet nenul v minimálním balancovaném binárním zápisu

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} b_0(n) \to \frac{1}{2}$$

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15
- vybereme zápis s maximálním počtem nul
  - nevyskytují se dvě nenuly vedle sebe

$$0111110 \to 10000\overline{1} \qquad 1\overline{1} \to 01$$

- $n \to b_0(n) :=$ počet nenul ve standardním binárním zápisu,
  $n \to b_r(n) :=$ počet nenul v minimálním balancovaném binárním zápisu

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} b_0(n) \to \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} b_r(n) \to \frac{1}{3}\ \textbf{!}$$

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15
- vybereme zápis s maximálním počtem nul
  - nevyskytují se dvě nenuly vedle sebe

$$0111110 \to 10000\overline{1} \qquad 1\overline{1} \to 01$$

- $n \to b_0(n) :=$ počet nenul ve standardním binárním zápisu,
  $n \to b_r(n) :=$ počet nenul v minimálním balancovaném binárním zápisu

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} b_0(n) \to \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} b_r(n) \to \frac{1}{3}\ !$$

- výhoda balancované binární soustavy pro násobení

- mocniny dvou $(2^k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- *redundantní*: nejednoznačnost zápisu
  $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 2^0$,
  tedy jak 1111 tak $1000\overline{1}$ jsou zápisy 15
- vybereme zápis s maximálním počtem nul
  - nevyskytují se dvě nenuly vedle sebe

$$0111110 \to 10000\overline{1} \qquad 1\overline{1} \to 01$$

- $n \to b_0(n) :=$ počet nenul ve standardním binárním zápisu,
  $n \to b_r(n) :=$ počet nenul v minimálním balancovaném binárním zápisu

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} b_0(n) \to \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} b_r(n) \to \frac{1}{3}\ !$$

- výhoda balancované binární soustavy pro násobení
- vhodná pro šifrování (RSA - násobení čísel řádově $10^{100}$)

# Program

- Carlitz (1968): uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$, kde $F_0 = 1,\ F_1 = 2,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ a cifry 0 a 1

- Carlitz (1968): uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$, kde $F_0 = 1,\ F_1 = 2,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ a cifry 0 a 1 každé $n = a_k F_k + a_{k-1} F_{k-1} + \cdots + a_1 F_1 + a_0 F_0$, kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1\}$

- Carlitz (1968): uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$, kde $F_0 = 1,\ F_1 = 2,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ a cifry 0 a 1 každé $n = a_k F_k + a_{k-1} F_{k-1} + \cdots + a_1 F_1 + a_0 F_0$, kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1\}$
- Jak zápis získat?

- Carlitz (1968): uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$, kde $F_0 = 1,\ F_1 = 2,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ a cifry 0 a 1 každé $n = a_k F_k + a_{k-1} F_{k-1} + \cdots + a_1 F_1 + a_0 F_0$, kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1\}$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!

- Carlitz (1968): uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$, kde $F_0 = 1,\ F_1 = 2,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ a cifry 0 a 1 každé $n = a_k F_k + a_{k-1} F_{k-1} + \cdots + a_1 F_1 + a_0 F_0$, kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1\}$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!

$$\overbrace{\underline{\ 1\ }}, \overbrace{\underline{\ 2\ }}, \overbrace{\underline{\ 3\ }}, \overbrace{\underline{\ 5\ }}, \overbrace{\underline{\ 8\ }}, \overbrace{\underline{\ 13\ }}, \overbrace{\underline{\ 21\ }}, \ \ldots$$

$$F_0,\quad F_1,\quad F_2,\quad F_3,\quad F_4,\quad F_5,\quad F_6,\ \ldots$$

- Carlitz (1968): uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$, kde $F_0 = 1,\ F_1 = 2,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ a cifry 0 a 1 každé $n = a_k F_k + a_{k-1} F_{k-1} + \cdots + a_1 F_1 + a_0 F_0$, kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1\}$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!

$$\overbrace{\underline{\ 1\ }}^{},\ \overbrace{\underline{\ 2\ }}^{},\ \overbrace{\underline{\ 3\ }}^{},\ \overbrace{\underline{\ 5\ }}^{},\ \overbrace{\underline{\ 8\ }}^{},\ \overbrace{\underline{\ 13\ }}^{},\ \overbrace{\underline{\ 21\ }}^{},\ \ldots$$

$$F_0,\quad F_1,\quad F_2,\quad F_3,\quad F_4,\quad F_5,\quad F_6,\ \ldots$$

$$30 = F_6 + F_4 + F_0 = 21 + 8 + 1 \qquad 30 = \langle 1010001 \rangle_F$$

- Carlitz (1968): uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$, kde $F_0 = 1,\ F_1 = 2,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ a cifry 0 a 1 každé $n = a_k F_k + a_{k-1} F_{k-1} + \cdots + a_1 F_1 + a_0 F_0$, kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1\}$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!

$$\underbrace{\overbrace{1}}_{F_0},\ \underbrace{\overbrace{2}}_{F_1},\ \underbrace{\overbrace{3}}_{F_2},\ \underbrace{\overbrace{5}}_{F_3},\ \underbrace{\overbrace{8}}_{F_4},\ \underbrace{\overbrace{13}}_{F_5},\ \underbrace{\overbrace{21}}_{F_6},\ \ldots$$

$$30 = F_6 + F_4 + F_0 = 21 + 8 + 1 \qquad 30 = \langle 1010001 \rangle_F$$

Hladový zápis neobsahuje 11.

- Carlitz (1968): uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$, kde $F_0 = 1,\ F_1 = 2,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ a cifry 0 a 1 každé $n = a_k F_k + a_{k-1} F_{k-1} + \cdots + a_1 F_1 + a_0 F_0$, kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1\}$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!

$$\overbrace{\underline{\ 1\ }}^{}_{F_0},\ \overbrace{\underline{\ 2\ }}^{}_{F_1},\ \overbrace{\underline{\ 3\ }}^{}_{F_2},\ \overbrace{\underline{\ 5\ }}^{}_{F_3},\ \overbrace{\underline{\ 8\ }}^{}_{F_4},\ \overbrace{\underline{\ 13\ }}^{}_{F_5},\ \overbrace{\underline{\ 21\ }}^{}_{F_6},\ \ldots$$

$$30 = F_6 + F_4 + F_0 = 21 + 8 + 1 \qquad 30 = \langle 1010001 \rangle_F$$

Hladový zápis neobsahuje 11.

- redundantní:

$$30 = F_5 + F_4 + F_3 + F_2 + F_0 = 13+8+5+3+1 \qquad 30 = \langle 111101 \rangle_F$$

- Carlitz (1968): uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$, kde $F_0 = 1,\ F_1 = 2,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ a cifry 0 a 1 každé $n = a_k F_k + a_{k-1} F_{k-1} + \cdots + a_1 F_1 + a_0 F_0$, kde cifry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,\ 1\}$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!

$$\overbrace{\underline{\ 1\ }}_{F_0},\ \overbrace{\underline{\ 2\ }}_{F_1},\ \overbrace{\underline{\ 3\ }}_{F_2},\ \overbrace{\underline{\ 5\ }}_{F_3},\ \overbrace{\underline{\ 8\ }}_{F_4},\ \overbrace{\underline{\ 13\ }}_{F_5},\ \overbrace{\underline{\ 21\ }}_{F_6},\ \ldots$$

$$30 = F_6 + F_4 + F_0 = 21 + 8 + 1 \qquad 30 = \langle 1010001 \rangle_F$$

Hladový zápis neobsahuje 11.

- redundantní:

$$30 = F_5 + F_4 + F_3 + F_2 + F_0 = 13+8+5+3+1 \qquad 30 = \langle 111101 \rangle_F$$

- Délka zápisu čísla $n$:
binární $\lceil \log_2 n \rceil$, Fibonacciho $\lceil \log_\tau n \rceil$, $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618$

- uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$

- uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- Steiner: hustota nenulových cifer $= \frac{1}{5}$

- uvažujme $(F_k)_{k=0}^{+\infty}$ a cifry z $\{-1, 0, 1\}$
- Steiner: hustota nenulových cifer $= \frac{1}{5}$
- výhodná pro počítačové násobení

# Program

- Rényi (1957): uvažujme $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cifry z $\{0, 1\}$

- Rényi (1957): uvažujme $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cifry z $\{0, 1\}$
  každé $n = a_k\tau^k + \cdots + a_1\tau^1 + a_0\tau^0 + a_{-1}\tau^{-1} + \ldots$

- Rényi (1957): uvažujme $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cifry z $\{0, 1\}$
  každé $n = a_k\tau^k + \cdots + a_1\tau^1 + a_0\tau^0 + a_{-1}\tau^{-1} + \ldots$
- Jak zápis získat?

- Rényi (1957): uvažujme $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cifry z $\{0, 1\}$
  každé $n = a_k\tau^k + \cdots + a_1\tau^1 + a_0\tau^0 + a_{-1}\tau^{-1} + \ldots$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!

- Rényi (1957): uvažujme $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cifry z $\{0, 1\}$
  každé $n = a_k\tau^k + \cdots + a_1\tau^1 + a_0\tau^0 + a_{-1}\tau^{-1} + \ldots$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!
- charakteristická rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

- Rényi (1957): uvažujme $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cifry z $\{0, 1\}$
  každé $n = a_k\tau^k + \cdots + a_1\tau^1 + a_0\tau^0 + a_{-1}\tau^{-1} + \ldots$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!
- charakteristická rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$2 = \tau + \frac{1}{\tau^2} \quad 2 = \langle 10 \bullet 01 \rangle_\tau$$

- Rényi (1957): uvažujme $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cifry z $\{0, 1\}$
  každé $n = a_k\tau^k + \cdots + a_1\tau^1 + a_0\tau^0 + a_{-1}\tau^{-1} + \ldots$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!
- charakteristická rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$2 = \tau + \frac{1}{\tau^2} \qquad 2 = \langle 10 \bullet 01 \rangle_\tau$$

Hladový zápis neobsahuje 11.

- Rényi (1957): uvažujme $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cifry z $\{0, 1\}$
  každé $n = a_k\tau^k + \cdots + a_1\tau^1 + a_0\tau^0 + a_{-1}\tau^{-1} + \ldots$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!
- charakteristická rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$2 = \tau + \frac{1}{\tau^2} \quad 2 = \langle 10 \bullet 01 \rangle_\tau$$

  Hladový zápis neobsahuje 11.
- $\mathbb{Z}_\tau^+ := \{x \geq 0 \mid \text{zápis } x \text{ má nulovou zlomkovou část}\} = \{0, 1, \tau, \tau^2, \tau^2 + 1, \tau^3, \tau^3 + 1, \ldots\}$

- Rényi (1957): uvažujme $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cifry z $\{0, 1\}$
  každé $n = a_k\tau^k + \cdots + a_1\tau^1 + a_0\tau^0 + a_{-1}\tau^{-1} + \ldots$
- Jak zápis získat? Hladovým algoritmem!
- charakteristická rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$2 = \tau + \frac{1}{\tau^2} \quad 2 = \langle 10 \bullet 01 \rangle_\tau$$

  Hladový zápis neobsahuje 11.
- $\mathbb{Z}_\tau^+ := \{x \geq 0 \mid \text{zápis } x \text{ má nulovou zlomkovou část}\} = \{0, 1, \tau, \tau^2, \tau^2 + 1, \tau^3, \tau^3 + 1, \ldots\}$
  vzdálenosti mezi sousedy 1 nebo $\frac{1}{\tau} = \tau - 1$

Shechtman, Blech, Gratias, Cahn (1982)
rychle zchlazená slitina $Al_{86}Mn_{14}$