Výzvy, které před matematiku staví výpočetní technika

Edita Pelantová

Katedra matematiky, FJFI,
České vysoké učení technické v Praze

25. pledna 2018
Praha

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis:	M, D, L, C, X, V, I	revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava:	$0, 1, 2, \ldots, 9$	revoluční rok 1848

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**


GLORIOSO
MARTYRI
DIVO
FLORIANO
CONTRAIGNES
POTENTI
PATRONO

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

79 krát 37 $=$ $LXXIX$ krát $XXXVII$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \ldots, 0, 1, \ldots, 5$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \ldots, 0, 1, \ldots, 5$
revoluční rok $2\overline{2}5\overline{2} \quad = \quad 2\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{2}$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \ldots, 0, 1, \ldots, 5$
revoluční rok $2\overline{2}5\overline{2} \quad = \quad 2\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{2}$

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad 1\overline{2}\,\overline{1} \text{ krát } 4\overline{3}$$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \ldots, 0, 1, \ldots, 5$
revoluční rok $2\bar{2}5\bar{2} \quad = \quad 2\bar{1}\,\bar{5}\,\bar{2}$

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad 1\bar{2}\,\bar{1} \text{ krát } 4\bar{3}$$

Co ovlivňuje volbu zápisu čísel:

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \ldots, 0, 1, \ldots, 5$
revoluční rok $2\overline{2}5\overline{2} \quad = \quad 2\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{2}$

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad 1\overline{2}\,\overline{1} \text{ krát } 4\overline{3}$$

Co ovlivňuje volbu zápisu čísel:

- za jakým účelem číslo zaznamenáváme
- jednoduchost algoritmů
- technické možnosti vykonávatele (velká paměť? hodně procesorů?)

Poziční soustavy

Mírná exotika   základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots b - 1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0\,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednozněně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0\,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 =$$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots b - 1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0\,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Poziční soustavy

Mírná exotika   základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots b - 1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 , \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854 báze $b = -2, \ \mathcal{D} = \{0, 1\}$

Poziční soustavy

Mírná exotika   základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0\,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854   báze $b = -2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n(-2)^n + a_{n-1}(-2)^{n-1} + \ldots + a_1(-2)^1 + a_0(-2)^0$, kde $a_i \in \{0, 1\}$.

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0\,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854 báze $b = -2, \ \mathcal{D} = \{0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n(-2)^n + a_{n-1}(-2)^{n-1} + \dots + a_1(-2)^1 + a_0(-2)^0$, kde $a_i \in \{0, 1\}$.

$54 =$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednozněčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854 báze $b = -2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n(-2)^n + a_{n-1}(-2)^{n-1} + \ldots + a_1(-2)^1 + a_0(-2)^0$, kde $a_i \in \{0, 1\}$.

$$54 = 1.(-2)^6 + 0.(-2)^5 + 0.(-2)^4 + 1.(-2)^3 + 0.(-2)^2 + 1.(-2)^1 + 0.(-2)^0$$

Mírná exotika II   Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \ldots, 40$ gramů ?

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \ldots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \ldots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \ldots + a_1 3^1 + a_0 3^0$, kde $a_i \in \{\bar{1}, 0, 1\}$.

$$54 =$$

Poziční soustavy

Mírná exotika II   Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \dots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava   báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \ldots + a_1 3^1 + a_0 3^0$, kde $a_i \in \{\overline{1}, 0, 1\}$.

$$54 = 3^4 + \overline{1}.3^3 + 0.3^2 + 0.3^1 + 0.3^0$$

Poziční soustavy

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \ldots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \ldots + a_1 3^1 + a_0 3^0$, kde $a_i \in \{\overline{1}, 0, 1\}$.

$$54 = 3^4 + \overline{1}.3^3 + 0.3^2 + 0.3^1 + 0.3^0$$

V této soustavě počítaly první ruské počítače

Výhody:
kratší zápis čísla než binárně
lze zpasat kladné i záporné čísla
rozvoj $-x$ snadno z rozvoje x,
stačí umět sčítat, odčítání stejné
vhodná abeceda na násobení

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Hledáme algoritmus na paralelní sčítání, tj. algoritmus, který by našel výsledek v čase nezávislém ne délce sčítanců

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

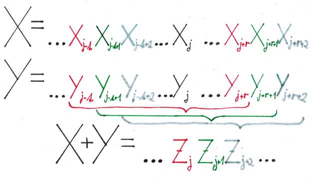
Hledáme algoritmus na paralelní sčítání, tj. algoritmus, který by našel výsledek v čase nezávislém ne délce sčítanců

$$X = \dots X_{j-l} X_{j-l+1} X_{j-l+2} \dots X_j \dots X_{j+r} X_{j+r+1} X_{j+r+2}$$

$$Y = \dots Y_{j-l} Y_{j-l+1} Y_{j-l+2} \dots Y_j \dots Y_{j+r} Y_{j+r+1} Y_{j+r+2}$$

$$X + Y = \dots Z_j Z_{j+1} Z_{j+2} \dots$$

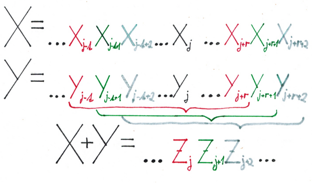
Hledáme algoritmus na paralelní sčítání, tj. algoritmus, který by našel výsledek v čase nezávislém ne délce sčítanců



$x =$ $y =$	$\dots x_{j+t} \dots x_{j+1} x_j x_{j-1} \dots x_{j-r} \dots$ $\dots y_{j+t} \dots y_{j+1} y_j y_{j-1} \dots y_{j-r} \dots$	$x_j \in \mathcal{A}$ $y_j \in \mathcal{A}$
$u_j = x_j + y_j$	$\dots \underbrace{u_{j+t} \dots u_{j+1} u_j u_{j-1} \dots u_{j-r}} \dots$	$u_j \in \mathcal{A} + \mathcal{A}$

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Hledáme algoritmus na paralelní sčítání, tj. algoritmus, který by našel výsledek v čase nezávislém ne délce sčítanců



$x =$	$\ldots x_{j+t} \ldots x_{j+1} x_j x_{j-1} \ldots x_{j-r} \ldots$	$x_j \in \mathcal{A}$
$y =$	$\ldots y_{j+t} \ldots y_{j+1} y_j y_{j-1} \ldots y_{j-r} \ldots$	$y_j \in \mathcal{A}$
$u_j = x_j + y_j$	$\ldots \underbrace{u_{j+t} \ldots u_{j+1} u_j u_{j-1} \ldots u_{j-r}} \ldots$	$u_j \in \mathcal{A} + \mathcal{A}$
$v_j = \phi(u_{j+t} \ldots u_{j-r})$	$\ldots v_{j+t} \ldots v_{j+1} v_j v_{j-1} \ldots v_{j-r} \ldots$	$v_j \in \mathcal{A}$

klasická desítková soustava

39999999999999. . . 99999999999999996
00000000000000. . . 0000000000000000x

39999999999999. . . 99999999999999996
00000000000000. . . 0000000000000000x

Nutná redundance!!!

39999999999999. . . 99999999999999996
00000000000000. . . 0000000000000000x

Nutná redundance!!!

Avizienis 1961: pro báze $b \in \mathbb{N}, b \geq 3$, abecedy $\mathcal{A} = \{-a, -a+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, a\}$, kde $a \geq \frac{b}{2}$.

399999999999999...99999999999999996
000000000000000...0000000000000000x

Nutná redundance!!!

Avizienis 1961: pro báze $b \in \mathbb{N}, b \geq 3$, abecedy $\mathcal{A} = \{-a, -a+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, a\}$, kde $a \geq \frac{b}{2}$.

Pentium používá pro dělení algoritmus SRT a redundantní soustavu se základem $\beta = 4$ a pěti ciframi $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

Algorithm: Base $b = 4$, alphabet $\mathcal{A} = \{-2 - 1, 0, 1, 2\}$

Input: two finite sequences of digits (x_i) and (y_i) of $\{-2 - 1, 0, 1, 2\}$
Output: a finite sequence of digits (z_i) of $\{-2 - 1, 0, 1, 2\}$, such that

$$\sum x_i 4^i + \sum y_i 4^i = \sum z_i 4^i.$$

for each i in parallel do

0. $w_i := x_i + y_i$

1. case $\left\{\begin{matrix} w_i \geq 3 \\ w_i = 2 \ \ \texttt{and} \ w_{i-1} \geq 2 \end{matrix}\right\}$ then $q_i := 1$

   case $\left\{\begin{matrix} w_i \leq -3 \\ w_i = -2 \ \ \texttt{and} \ w_{i-1} \leq -2 \end{matrix}\right\}$ then $q_i := -1$

   else $q_i := 0$

2. $z_i := w_i - q_i 4 + q_{i-1}$

Jak chytře násobit?

Jak chytře násobit?

Co je špatně na klasických algoritmech pro $A \times B$?

$$0 \bullet x_1 x_2 \cdots x_n \quad \times \quad 0 \bullet y_1 y_2 \cdots y_n \quad = \quad 0 \bullet z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} \cdots z_{2n}$$

Jak chytře násobit?

Co je špatně na klasických algoritmech pro $A \times B$?

$$0 \bullet x_1 x_2 \cdots x_n \quad \times \quad 0 \bullet y_1 y_2 \cdots y_n \quad = \quad 0 \bullet z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} \cdots z_{2n}$$

Co je špatně na klasických algoritmech pro A/B a pro $\sqrt{A}$?

Jak chytře násobit?

Co je špatně na klasických algoritmech pro $A \times B$?

$$0 \bullet x_1 x_2 \cdots x_n \quad \times \quad 0 \bullet y_1 y_2 \cdots y_n \quad = \quad 0 \bullet z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} \cdots z_{2n}$$

Co je špatně na klasických algoritmech pro A/B a pro $\sqrt{A}$?

On-line algoritmus se zpožděním $\delta \in \mathbb{N}$

$$X = 0.x_1 x_2 \ldots x_\delta x_{\delta+1} x_{\delta+2} x_{\delta+3} \ldots$$

$$Y = 0.y_1 y_2 \ldots y_\delta y_{\delta+1} y_{\delta+2} y_{\delta+3} \ldots$$

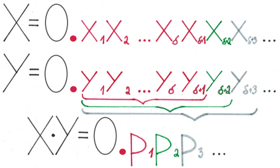
$$X \cdot Y = 0.p_1 p_2 p_3 \ldots$$

Co je špatně na klasických algoritmech pro $A \times B$?

$$0 \bullet x_1 x_2 \cdots x_n \quad \times \quad 0 \bullet y_1 y_2 \cdots y_n \quad = \quad 0 \bullet z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} \cdots z_{2n}$$

Co je špatně na klasických algoritmech pro A/B a pro $\sqrt{A}$?

On-line algoritmus se zpožděním $\delta \in \mathbb{N}$



Trivedi a Ercegovac v roce 1974 zavedli on-line algoritmus na násobení a dělení pro redundantní soustavy.

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: vo většině jazyků - neplatí to pre Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: vo většině jazyků - neplatí to pre Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, v čukotštině, (částečně francouštině)

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: vo většině jazyků - neplatí to pre Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, v čukotštině, (částečně francouštině)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: vo většině jazyků - neplatí to pre Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, v čukotštině, (částečně francouštině)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: vo většině jazyků - neplatí to pre Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, v čukotštině, (částečně francouštině)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: vo většině jazyků - neplatí to pre Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, v čukotštině, (částečně francouštině)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

základ **12**: jazyk berom v Nigérii

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: vo většině jazyků - neplatí to pre Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, v čukotštině, (částečně francouštině)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

základ **12**: jazyk berom v Nigérii

základ **24**: některé papuánské jazyky z rodiny skow

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: vo většině jazyků - neplatí to pre Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, v čukotštině, (částečně francouštině)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

základ **12**: jazyk berom v Nigérii

základ **24**: některé papuánské jazyky z rodiny skow

základ **200**: Jorubština v kombinaci s bází 5

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: vo většině jazyků - neplatí to pre Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, v čukotštině, (částečně francouštině)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

základ **12**: jazyk berom v Nigérii

základ **24**: některé papuánské jazyky z rodiny skow

základ **200**: Jorubština v kombinaci s bází 5

základ **60**: Sumer

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoevropských jazyků:

dva, tři – two, three – duo, tre

kaksi, kolme – kettő, harom

jiho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou zápůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: vo většině jazyků - neplatí to pre Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, v čukotštině, (částečně francouštině)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

základ **12**: jazyk berom v Nigérii

základ **24**: některé papuánské jazyky z rodiny skow

základ **200**: Jorubština v kombinaci s bází 5

základ **60**: Sumer

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Novej Guinee nepoužívá báze ani vyšší číslovky

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Novej Guinee nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, . . .

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Novej Guinee nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, . . .
Extrém v amazónském jazyce piraha: chyběbají číslovky a plurál

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Novej Guinee nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...
Extrém v amazónském jazyce piraha: chyběbají číslovky a plurál

Tělo jako model číselné řady:

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Novej Guinee nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...
Extrém v amazónském jazyce piraha: chyběbají číslovky a plurál

Tělo jako model číselné řady:
10 prstů
4 klouby zaťaté pěsti
20 prstů na rukách a nohách

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Novej Guinee nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, . . .
Extrém v amazónském jazyce piraha: chyběbají číslovky a plurál

Tělo jako model číselné řady:
10 prstů
4 klouby zaťaté pěsti
20 prstů na rukách a nohách
v grónském jazyce yimas se 19 řekne: "obě ruce, skočit dole potom na noze pět, druhá strana dva - druhé dva"

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Novej Guinee nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, . . .
Extrém v amazónském jazyce piraha: chyběbají číslovky a plurál

Tělo jako model číselné řady:
10 prstů
4 klouby zaťaté pěsti
20 prstů na rukách a nohách
v grónském jazyce yimas se 19 řekne: "obě ruce, skočit dole potom na noze pět, druhá strana dva - druhé dva"
v jazyce kobon sa počítají postupně: prsty, zápěstí, loket, rameno, klíční kost, krk a dále v opačném pořadí

Jazyk haruai na Novej Guinee nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...
Extrém v amazónském jazyce piraha: chyběbají číslovky a plurál

Tělo jako model číselné řady:
10 prstů
4 klouby zaťaté pěsti
20 prstů na rukách a nohách
v grónském jazyce yimas se 19 řekne: "obě ruce, skočit dole potom na noze pět, druhá strana dva - druhé dva"
v jazyce kobon sa počítají postupně: prsty, zápěstí, loket, rameno, klíční kost, krk a dále v opačném pořadí
v některých jazycích se počítají: líce, uši, oči, nos, nosné dírky, brada, prsní kost, prsty na nohách, atd. Výjimečně i genitálie (číslovky 31, 32, 33 v jazyce yupno)

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Novej Guinee nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...
Extrém v amazónském jazyce piraha: chyběbají číslovky a plurál

Tělo jako model číselné řady:
10 prstů
4 klouby zaťaté pěsti
20 prstů na rukách a nohách
v grónském jazyce yimas se 19 řekne: "obě ruce, skočit dole potom na noze pět, druhá strana dva - druhé dva"
v jazyce kobon sa počítají postupně: prsty, zápěstí, loket, rameno, klíční kost, krk a dále v opačném pořadí
v některých jazycích se počítají: líce, uši, oči, nos, nosné dírky, brada, prsní kost, prsty na nohách, atd. Výjimečně i genitálie (číslovky 31, 32, 33 v jazyce yupno)
Jan Pokorný: Lingvistická antropologie, Grada 2010

Nestandardní poziční soustavy

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \leq a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Nestandardní poziční soustavy

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \leq a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Příklad báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ a abeceda $\{0,1\}$

τ je kořeň rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \leq a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Příklad báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ a abeceda $\{0,1\}$

τ je kořeň rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_\tau = 1 \bullet 11$$

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \leq a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Příklad báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ a abeceda $\{0,1\}$

τ je kořeň rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_\tau = 1 \bullet 11 \ = 10 \bullet 01$$

Nestandardní poziční soustavy

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \leq a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Příklad báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ a abeceda $\{0, 1\}$

τ je kořeň rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_\tau = 1 \bullet 11 \ = 10 \bullet 01 \ = 10 \bullet 0011 = \ldots$$

Nestandardní poziční soustavy

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \leq a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Příklad báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ a abeceda $\{0, 1\}$

τ je kořeň rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_\tau = 1 \bullet 11 \ = 10 \bullet 01 \ = 10 \bullet 0011 = \ldots$$

$$(\tfrac{1}{2})_\tau = 0 \bullet (010)^\omega = 0 \bullet 010010010010010\ldots$$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru $x = x_n\gamma^n + x_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + x_1\gamma^1 + x_0\gamma^0, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru $x = x_n\gamma^n + x_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + x_1\gamma^1 + x_0\gamma^0, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k\gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$;

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru $x = x_n\gamma^n + x_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + x_1\gamma^1 + x_0\gamma^0, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k\gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$;

$\gamma = i - 1$, $\gamma^2 = -2i$, $\gamma^3 = 2 + 2i$, $\gamma^4 = -4, \ldots$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru $x = x_n\gamma^n + x_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + x_1\gamma^1 + x_0\gamma^0, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k\gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$;

$\gamma = i - 1$, $\gamma^2 = -2i$, $\gamma^3 = 2 + 2i$, $\gamma^4 = -4, \ldots$
$2 = \gamma^3 + \gamma^2$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru $x = x_n\gamma^n + x_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + x_1\gamma^1 + x_0\gamma^0, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k\gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$;

$\gamma = i - 1,\ \gamma^2 = -2i,\ \gamma^3 = 2 + 2i,\ \gamma^4 = -4, \ldots$
$2 = \gamma^3 + \gamma^2 \quad \Longrightarrow \quad (2)_\gamma = 1100\bullet$
$(3)_\gamma = 1101\bullet$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru $x = x_n\gamma^n + x_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + x_1\gamma^1 + x_0\gamma^0, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k\gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$;

$\gamma = i - 1,\ \gamma^2 = -2i,\ \gamma^3 = 2 + 2i,\ \gamma^4 = -4, \ldots$

$2 = \gamma^3 + \gamma^2 \quad \Longrightarrow \quad (2)_\gamma = 1100\bullet$

$(3)_\gamma = 1101\bullet \qquad (4)_\gamma = 111010000\bullet \qquad (-1)_\gamma = 11101\bullet$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru $x = x_n\gamma^n + x_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + x_1\gamma^1 + x_0\gamma^0, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k\gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$;

$\gamma = i - 1,\ \gamma^2 = -2i,\ \gamma^3 = 2 + 2i,\ \gamma^4 = -4, \ldots$

$2 = \gamma^3 + \gamma^2 \quad \Longrightarrow \quad (2)_\gamma = 1100\bullet$

$(3)_\gamma = 1101\bullet \qquad (4)_\gamma = 111010000\bullet \qquad (-1)_\gamma = 11101\bullet$

Jak v této soustavě sčítat?

Když nepotřebujeme porovnávat a dělit

Když nepotřebujeme porovnávat a dělit

Úloha: Když dělím věk děkana číslem $d_1 = 3$ dostanu zbytek 1, když $d_2 = 5$ dostanu zbytek 0, když $d_3 = 7$ dostanu zbytek 6. Kolik let je děkanovi?

Když nepotřebujeme porovnávat a dělit

Úloha: Když dělím věk děkana číslem $d_1 = 3$ dostanu zbytek 1, když $d_2 = 5$ dostanu zbytek 0, když $d_3 = 7$ dostanu zbytek 6. Kolik let je děkanovi?

Věta o čínských zbytcích

Úloha: Když dělím věk děkana číslem $d_1 = 3$ dostanu zbytek 1, když $d_2 = 5$ dostanu zbytek 0, když $d_3 = 7$ dostanu zbytek 6. Kolik let je děkanovi?

Věta o čínských zbytcích

Nechť $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$ jsou po dvou nesoudělná čísla. Pak pro každou k-tici $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ zbytků

$$r_1 \in \{0, 1, \ldots, d_1 - 1\}, r_2 \in \{0, 1, \ldots, d_2 - 1\}, \ldots, r_k \in \{0, 1, \ldots, d_k - 1\}$$

existuje jediné celé číslo $0 \leq N < d_1 d_2 \cdots d_k$ takové, že

pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ je zbytek po dělení čísla N číslem d_i roven r_i.

Když nepotřebujeme porovnávat a dělit

Úloha: Když dělím věk děkana číslem $d_1 = 3$ dostanu zbytek 1, když $d_2 = 5$ dostanu zbytek 0, když $d_3 = 7$ dostanu zbytek 6. Kolik let je děkanovi?

Věta o čínských zbytcích

Nechť $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$ jsou po dvou nesoudělná čísla. Pak pro každou k-tici $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ zbytků

$$r_1 \in \{0, 1, \ldots, d_1 - 1\}, r_2 \in \{0, 1, \ldots, d_2 - 1\}, \ldots, r_k \in \{0, 1, \ldots, d_k - 1\}$$

existuje jediné celé číslo $0 \leq N < d_1 d_2 \cdots d_k$ takové, že

pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ je zbytek po dělení čísla N číslem d_i roven r_i.

Čísla N reprezentujeme jako $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$.

Operace:

Když nepotřebujeme porovnávat a dělit

Úloha: Když dělím věk děkana číslem $d_1 = 3$ dostanu zbytek 1, když $d_2 = 5$ dostanu zbytek 0, když $d_3 = 7$ dostanu zbytek 6. Kolik let je děkanovi?

Věta o čínských zbytcích

Nechť $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$ jsou po dvou nesoudělná čísla. Pak pro každou k-tici $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ zbytků

$$r_1 \in \{0, 1, \ldots, d_1 - 1\}, r_2 \in \{0, 1, \ldots, d_2 - 1\}, \ldots, r_k \in \{0, 1, \ldots, d_k - 1\}$$

existuje jediné celé číslo $0 \leq N < d_1 d_2 \cdots d_k$ takové, že

pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ je zbytek po dělení čísla N číslem d_i roven r_i.

Čísla N reprezentujeme jako $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$.

Operace:
$55 \mapsto (1, 0, 6)$,

Když nepotřebujeme porovnávat a dělit

Úloha: Když dělím věk děkana číslem $d_1 = 3$ dostanu zbytek 1, když $d_2 = 5$ dostanu zbytek 0, když $d_3 = 7$ dostanu zbytek 6. Kolik let je děkanovi?

Věta o čínských zbytcích

Nechť $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$ jsou po dvou nesoudělná čísla. Pak pro každou k-tici $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ zbytků

$$r_1 \in \{0, 1, \ldots, d_1 - 1\}, r_2 \in \{0, 1, \ldots, d_2 - 1\}, \ldots, r_k \in \{0, 1, \ldots, d_k - 1\}$$

existuje jediné celé číslo $0 \leq N < d_1 d_2 \cdots d_k$ takové, že

pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ je zbytek po dělení čísla N číslem d_i roven r_i.

Čísla N reprezentujeme jako $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$.

Operace:
$55 \mapsto (1, 0, 6), \quad 10 \mapsto (1, 0, 3)$

Když nepotřebujeme porovnávat a dělit

Úloha: Když dělím věk děkana číslem $d_1 = 3$ dostanu zbytek 1, když $d_2 = 5$ dostanu zbytek 0, když $d_3 = 7$ dostanu zbytek 6. Kolik let je děkanovi?

Věta o čínských zbytcích

Nechť $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$ jsou po dvou nesoudělná čísla. Pak pro každou k-tici $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ zbytků

$$r_1 \in \{0, 1, \ldots, d_1 - 1\}, r_2 \in \{0, 1, \ldots, d_2 - 1\}, \ldots, r_k \in \{0, 1, \ldots, d_k - 1\}$$

existuje jediné celé číslo $0 \leq N < d_1 d_2 \cdots d_k$ takové, že

pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ je zbytek po dělení čísla N číslem d_i roven r_i.

Čísla N reprezentujeme jako $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$.

Operace:
$55 \mapsto (1, 0, 6)$, $10 \mapsto (1, 0, 3)$ součet $55 + 10 = 65 \mapsto (2, 0, 2)$.

Polynom $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Výpočet elementárních funkcí

Polynom $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Např. $p(x) = 3x^2 - 5x + 3$

Výpočet elementárních funkcí

Polynom $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Např. $p(x) = 3x^2 - 5x + 3$ $\qquad p(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2})^2 - 5\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{4} = 1,25$

Výpočet elementárních funkcí

Polynom $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Např. $p(x) = 3x^2 - 5x + 3$ $\qquad p(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2})^2 - 5\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{4} = 1,25$

Další funkce

$$\sin x \qquad 2^x \qquad \ln x$$

Výpočet elementárních funkcí

Polynom $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Např. $p(x) = 3x^2 - 5x + 3$ $\qquad p(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2})^2 - 5\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{4} = 1,25$

Další funkce

$$\sin x \qquad 2^x \qquad \ln x$$

$$e^x = 1 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + \tfrac{1}{9!}x^9 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Rozvoje čísla do nekonečných řad

Věta

Nechť (w_n) je klesající posloupnost kladných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ je konvergentní a $w_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k$. Pak každé $x \in [0, \sum_{n=1}^{\infty} w_n]$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n w_n, \quad \text{kde } d_n \in \{0, 1\}$$

Rozvoje čísla do nekonečných řad

Věta

Nechť (w_n) je klesající posloupnost kladných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ je konvergentní a $w_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k$. Pak každé $x \in [0, \sum_{n=1}^{\infty} w_n]$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n w_n, \quad \text{kde } d_n \in \{0, 1\}$$

Hladový algoritmus pro hledání d_n

$$t_0 = 0, \quad t_n = t_{n-1} + d_n w_n, \quad d_n = \begin{cases} 1 & \text{když } t_{n-1} + w_n \leq x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

splňují

$$x = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} d_k w_k$$

Výpočet $\exp(x)$

Výpočet $\exp(x)$

1) Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

Výpočet $\exp(x)$

1) Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$

2) Najdi $d_i \in \{0, 1\}$ pro $i = 1, 2, 3, \dots$ tak, aby $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})$.

Výpočet $\exp(x)$

1) Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

2) Najdi $d_i \in \{0, 1\}$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$ tak, aby $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})$. Pak

$$\exp x = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})\Big) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + 2^{-i})^{d_i}$$

Výpočet $\exp(x)$

1) Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1+2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

2) Najdi $d_i \in \{0, 1\}$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$ tak, aby $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1+2^{-i})$. Pak

$$\exp x = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1+2^{-i})\Big) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+2^{-i})^{d_i} = \prod_{i=1}^{\infty}(1+d_i 2^{-i})$$

Výpočet $\exp(x)$

1) Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$
2) Najdi $d_i \in \{0, 1\}$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$ tak, aby $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})$. Pak

$$\exp x = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})\right) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + 2^{-i})^{d_i} = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + d_i 2^{-i})$$

výpočet e^x

$$E_0 := 1, \quad E_n = E_{n-1}(1 + d_n 2^{-n}) = E_{n-1} + d_n 2^{-n} E_{n-1}$$

Výpočet $\exp(x)$

1) Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$

2) Najdi $d_i \in \{0, 1\}$ pro $i = 1, 2, 3, \dots$ tak, aby $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})$. Pak

$$\exp x = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})\Big) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + 2^{-i})^{d_i} = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + d_i 2^{-i})$$

výpočet e^x

$$E_0 := 1, \quad E_n = E_{n-1}(1 + d_n 2^{-n}) = E_{n-1} + d_n 2^{-n} E_{n-1}$$

Kvůli odhadu chyby:

$$\frac{\exp x}{E_n} = \exp\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})\Big) < \exp\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i}\Big) = \exp(\tfrac{1}{2^n})$$

Pro $x \in [0, \ln 2]$

$$0 \le e^x - E_n = \Big(1 - \frac{E_n}{e^x}\Big)e^x < 2\big(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\big) \le \tfrac{1}{2^{n-1}}$$

Výpočet $\exp(x)$

Co velká x?

Co velká x? Posun proměnné do vhodného intervalu

Výpočet $\exp(x)$

Co velká x? Posun proměnné do vhodného intervalu

Algoritmus: vstup x

1. Najdi $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $y = x - k \ln 2 \in [0, \ln 2]$
2. Spočítej předchozí metodou e^y
3. Polož $e^x = e^{y + k \ln 2} = 2^k e^y$ (tedy posuň binární tečku v e^y o k míst)

Co velká x? Posun proměnné do vhodného intervalu

Algoritmus: vstup x

1. Najdi $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $y = x - k \ln 2 \in [0, \ln 2]$
2. Spočítej předchozí metodou e^y
3. Polož $e^x = e^{y+k\ln 2} = 2^k e^y$ (tedy posuň binární tečku v e^y o k míst)

"Shift and Add Algorithm" pro výpočet sin a cos : rozvoj do řady

$$\sum d_n \arctan 2^{-n}, \text{kde} \quad d_n \in \{-1, 1\}$$

Výpočet $\exp(x)$

Co velká x? Posun proměnné do vhodného intervalu

Algoritmus: vstup x

1. Najdi $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $y = x - k \ln 2 \in [0, \ln 2]$
2. Spočítej předchozí metodou e^y
3. Polož $e^x = e^{y+k \ln 2} = 2^k e^y$ (tedy posuň binární tečku v e^y o k míst)

"Shift and Add Algorithm" pro výpočet sin a cos : rozvoj do řady

$$\sum d_n \arctan 2^{-n}, \text{kde} \quad d_n \in \{-1, 1\}$$

tzv. algoritmus CORDIC


ET AD
DICTA
VICINIÆ
ADSITÆ
PIETAS

katalytické výpočty

Děkuji za pozornost