Násobíme chytře?

Ľubomíra Dvořáková

Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze
https://kmlinux.fjfi.cvut.cz/∼ balkolub/SOC.html

26. května 2020

Program

1. Historické násobení
   - Indické násobení
   - Čínské násobení
   - Egyptské (etiopské) násobení
   - Ruské (sedlácké) násobení
   - Cauchyovo komplementární násobení
   - Násobení pomocí prstů

- **Definice** (Ottův slovník naučný):
  Násobení v mathematice jest základní úkon početní, kterým hledáme součet dvou nebo několika čísel stejné velikosti.

- **Definice** (Ottův slovník naučný):
  Násobení v mathematice jest základní úkon početní, kterým hledáme součet dvou nebo několika čísel stejné velikosti.
- **Etymologie**: *násobeno* vzniklo z *na sobě*, tj. trojnásobný je vlastně trojí na sobě

- **Definice** (Ottův slovník naučný):
  Násobení v mathematice jest základní úkon početní, kterým hledáme součet dvou nebo několika čísel stejné velikosti.
- **Etymologie**: *násobeno* vzniklo z *na sobě*, tj. trojnásobný je vlastně trojí na sobě
- $\times$ poprvé 1631 – William Oughtred *Clavis mathematicae*
  $\cdot$ poprvé 1698 – Leibnizův dopis Johannovi Bernoullimu

Program

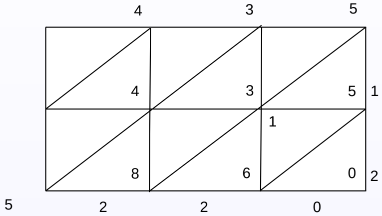
1. Historické násobení
   - Indické násobení
   - Čínské násobení
   - Egyptské (etiopské) násobení
   - Ruské (sedlácké) násobení
   - Cauchyovo komplementární násobení
   - Násobení pomocí prstů

Program

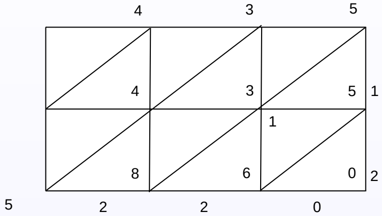
1. Historické násobení
   - Indické násobení
   - Čínské násobení
   - Egyptské (etiopské) násobení
   - Ruské (sedlácké) násobení
   - Cauchyovo komplementární násobení
   - Násobení pomocí prstů

- chceme násobit 435×12

- chceme násobit 435×12

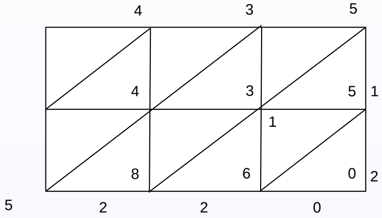


- chceme násobit 435×12



- známých je více než 8 způsobů násobení

- chceme násobit 435×12



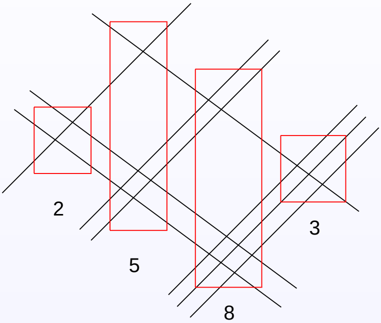
- známých je více než 8 způsobů násobení
- Leonardo Pisánský (1170-1250): "Devatero znaků indických je $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, těmito devíti znaky a znakem 0, který se arabsky zefír nazývá, se dá zapsat každé číslo."

Program

1. Historické násobení
   - Indické násobení
   - Čínské násobení
   - Egyptské (etiopské) násobení
   - Ruské (sedlácké) násobení
   - Cauchyovo komplementární násobení
   - Násobení pomocí prstů

- chceme násobit 123×21

- chceme násobit 123×21



Program

1. Historické násobení
   - Indické násobení
   - Čínské násobení
   - Egyptské (etiopské) násobení
   - Ruské (sedlácké) násobení
   - Cauchyovo komplementární násobení
   - Násobení pomocí prstů

- chceme násobit 13×15

- chceme násobit 13×15

$$
\begin{array}{rcr}
13 & \times & 15 \\
\hline
\sqrt{1} & & 15 \\
2 & & 30 \\
\sqrt{4} & & 60 \\
\sqrt{8} & & 120 \\
\hline\hline
 & & 195
\end{array}
$$

- chceme násobit 13×15

$$
\begin{array}{rcr}
13 & \times & 15 \\
\hline
\sqrt{}1 & & 15 \\
2 & & 30 \\
\sqrt{}4 & & 60 \\
\sqrt{}8 & & 120 \\
\hline\hline
 & & 195
\end{array}
$$

- $60 = 32 + 28 = 32 + 16 + 12 = 32 + 16 + 8 + 4$

- chceme násobit 13×15

13	$\times$	15
$\surd 1$		15
2		30
$\surd 4$		60
$\surd 8$		120
		195

- $60 = 32 + 28 = 32 + 16 + 12 = 32 + 16 + 8 + 4$
- původ: rovnoramenné váhy,
  uměli získávat závaží $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$ a všimli si, že pomocí nich vyváží jakékoliv závaží hmotnosti b

Program

- chceme násobit 13×15

- chceme násobit 13×15
- díváme se na zbytky po dělení 2

- chceme násobit 13×15
- díváme se na zbytky po dělení 2

13	$\times$	15
$13 : 2 = 6$	zbytek 1	15
$6 : 2 = 3$	zbytek 0	30
$3 : 2 = 1$	zbytek 1	60
$1 : 2 = 0$	zbytek 1	120
		195

- chceme násobit 13×15
- díváme se na zbytky po dělení 2

13	$\times$	15
$13 : 2 = 6$	zbytek 1	15
$6 : 2 = 3$	zbytek 0	30
$3 : 2 = 1$	zbytek 1	60
$1 : 2 = 0$	zbytek 1	120
		195

- po zavedení indicko-arabského způsobu násobení v Evropě se na sedlácké násobení zapomnělo a s překvapením pak bylo “objeveno” v Rusku v 19. století

Program

1. Historické násobení
   - Indické násobení
   - Čínské násobení
   - Egyptské (etiopské) násobení
   - Ruské (sedlácké) násobení
   - Cauchyovo komplementární násobení
   - Násobení pomocí prstů

- chceme násobit 57×17

- chceme násobit 57×17
- zapíšeme čísla pomocí cifer z $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

- chceme násobit 57×17
- zapíšeme čísla pomocí cifer z $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$57 = 1\overline{4}\overline{3} = 100 - 40 - 3 \quad \text{a} \quad 17 = 2\overline{3} = 20 - 3$$

- chceme násobit 57×17
- zapíšeme čísla pomocí cifer z $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$57 = 1\overline{4}\overline{3} = 100 - 40 - 3 \quad \text{a} \quad 17 = 2\overline{3} = 20 - 3$$

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & \overline{4} & \overline{3} \\
 & & 2 & \overline{3} \\
\hline
 & -2 & 2 & 9 \\
2 & -8 & -6 & \\
\hline
1 & 0 & -4 & 9 \\
\hline\hline
 & 9 & 6 & 9
\end{array}$$

- chceme násobit 57×17
- zapíšeme čísla pomocí cifer z $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

$$57 = 1\overline{4}\overline{3} = 100 - 40 - 3 \quad \text{a} \quad 17 = 2\overline{3} = 20 - 3$$

$$\begin{array}{rrrr}
 & 1 & \overline{4} & \overline{3} \\
 & & 2 & \overline{3} \\
\hline
 & -2 & 2 & 9 \\
2 & -8 & -6 & \\
\hline
1 & 0 & -4 & 9 \\
\hline\hline
 & 9 & 6 & 9
\end{array}$$

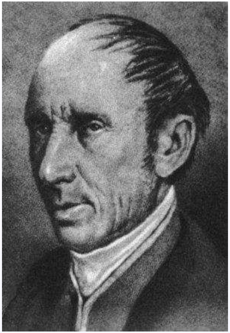
- vystačíme s malou násobilkou do 5×5

- převod 57 a 17 do "kvazidesítkové soustavy"

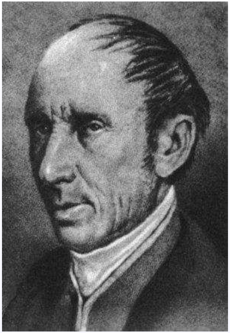
$$\begin{array}{rrr} & 5 & 7 \\ + & 4 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ \hline\hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 7 \\ + & 4 & 4 \\ \hline & 6 & 1 \\ & 2 & -3 \\ \hline\hline \end{array}$$

Augustin Louis CAUCHY (1789–1857)

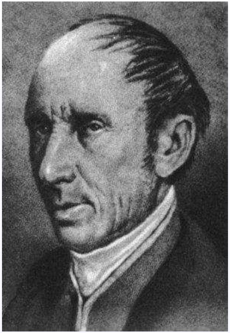


Augustin Louis CAUCHY (1789–1857)



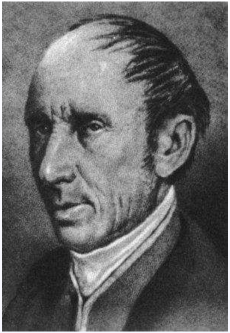
- fanatický katolík, přívrženec Bourbonů, kongregace (jezuité)

Augustin Louis CAUCHY (1789–1857)



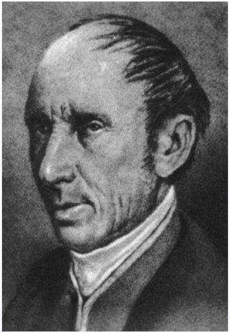
- fanatický katolík, přívrženec Bourbonů, kongregace (jezuité)
- profesor na Ecole Polytechnique - Cours d'analyse (1821): limita, spojitost, derivace, integrál, funkce komplexní proměnné, řešení diferenciálních rovnic

Augustin Louis CAUCHY (1789–1857)



- fanatický katolík, přívrženec Bourbonů, kongregace (jezuité)
- profesor na Ecole Polytechnique - Cours d'analyse (1821): limita, spojitost, derivace, integrál, funkce komplexní proměnné, řešení diferenciálních rovnic
- učitel vnuka Karla X. (pobyt v Praze 1833-35)

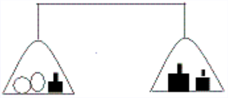
Augustin Louis CAUCHY (1789–1857)



- fanatický katolík, přívrženec Bourbonů, kongregace (jezuité)
- profesor na Ecole Polytechnique - Cours d'analyse (1821): limita, spojitost, derivace, integrál, funkce komplexní proměnné, řešení diferenciálních rovnic
- učitel vnuka Karla X. (pobyt v Praze 1833-35)
- 789 článků (více jen Erdös, Euler a Caley)

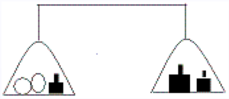
Odbočka: Balancovaná ternární soustava

Otázka: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?



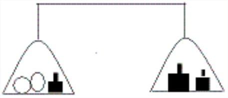
Odbočka: Balancovaná ternární soustava

Otázka: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?
Tři závaží nestačí!



Odbočka: Balancovaná ternární soustava

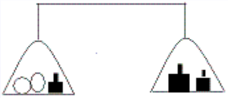
Otázka: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?
Tři závaží nestačí!



Řešení: $1, 3, 9, 27$.

Odbočka: Balancovaná ternární soustava

Otázka: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?
Tři závaží nestačí!

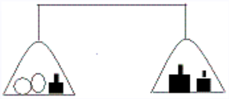


Řešení: $1, 3, 9, 27$.

$5 = 9 - 3 - 1$

Odbočka: Balancovaná ternární soustava

Otázka: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?
Tři závaží nestačí!

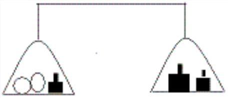


Řešení: $1, 3, 9, 27$.

$5 = 9 - 3 - 1$
$18 = 27 - 9$

Odbočka: Balancovaná ternární soustava

Otázka: Chceme vážit věci o hmotnostech $1, 2, \ldots, 40$ kg. Jakou nejmenší sadu závaží zvolit?
Tři závaží nestačí!



Řešení: $1, 3, 9, 27$.

$5 = 9 - 3 - 1$
$18 = 27 - 9$

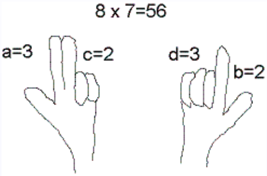
$$\{a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0 3^0 \mid a_i \in \{-1, 0, 1\}\} =$$
$$= \{-\tfrac{3^{k+1}-1}{2}, \ldots, 0, \ldots, \tfrac{3^{k+1}-1}{2}\}$$

Program

1. Historické násobení
   - Indické násobení
   - Čínské násobení
   - Egyptské (etiopské) násobení
   - Ruské (sedlácké) násobení
   - Cauchyovo komplementární násobení
   - Násobení pomocí prstů

- cikánská násobilka – vystačíme s malou násobilkou do 5×5
- násobení devítkou

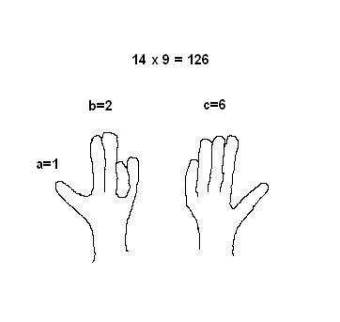
Cikánská (středověká) násobilka



- vztyčené prsty a, b
- schované prsty c, d

$$\begin{aligned}(10-c)(10-d) &= 100-(c+d)10+cd\\ &= 10(10-c-d)+cd\\ &= 10(a+b)+cd\end{aligned}$$

Násobení devítkou



- od 12 do 19 krát 9
- pro $d \in \{2, 3, \ldots, 9\}$

$$\begin{aligned}(10+d)9 &= 90 + 9d \\ &= 100 + 10(d-2) + (10-d) \\ &= 100a + 10b + c\end{aligned}$$

SOČ: Aritmetika včera a dnes

Egyptské (etiopské) násobení je založené na binárním zápisu násobence. (Samozřejmě etiopské kmeny nemluvili o binárním zápisu, když Egypťanům svůj způsob násobení vysvětlovali :)

- Chceme-li egyptským způsobem vynásobit 13 krát 15, sestavíme si tabulku, jejíž první sloupec tvoří mocniny dvou menší nebo rovny 13 a druhý sloupec vznikne postupným zdvojováním 15.
- V prvním sloupci si zaškrtneme mocniny dvou, které se vyskytují v binárním zápisu 13.
- Ten zřejmě staří Egypťané sestavili hladovým algoritmem: Podívali se, jakou nejvyšší mocninu dvojky číslo 13 obsahuje. To je 8. Poté od 13 odečetli 8 a pro získaný rozdíl 5 opět našli největší mocninu dvojky, kterou číslo 5 obsahuje. To je 4. Na závěr spočetli rozdíl 5 - 4 = 1, a to je nultá mocnina dvojky. Získali $13 = 1 + 4 + 8$.
- Pak již stačilo sečíst ve druhém sloupci řádky odpovídající zaškrtnutým mocninám dvou. Výsledek 195.

13	×	15
$\surd 1$		15
2		30
$\surd 4$		60
$\surd 8$		120
		195

A odkud Egypťané věděli, že každé číslo má binární zápis, tj. může být vyjádřeno jako součet mocnin dvou? Pravděpodobně díky rovnoramenným vahám. Ty totiž používali a mohli si tedy všimnout, že mají-li závaží hmotnosti n debenů (základní jednotka staroegyptského systému měření hmotnosti), mohou si pomocí rovnoramenných vah vyrobit závaží hmotnosti 2n debenů tak, že na jednu misku vah položí n-debenové závaží a na druhé misce vah jej vyváží. Spojením použitých předmětů vznikne hledané závaží hmotnosti 2n debenů. Poté již stačilo vypozorovat, že každý předmět hmotnosti m krát n debenů, kde m je přirozené číslo, je možno vyvážit pomocí závaží o hmotnostech n, 2n, 4n, 8n atd.

× odeslat

× = 0

Zdrojový kód v PHP:

```
$cislo1 = $_GET['cislo1'];
$cislo2 = $_GET['cislo2']; /* načte čísla z formuláře */
$pole1 = Array(); /* vytvoří prázdné pole pro mocniny dvou */
$pole2 = Array(); /* vytvoří prázdné pole pro dvounásobky násobitele */
$i = 0;
$x = 1;
while ($x <= $cislo1){ /* dokud není mocnina dvou větší než násobenec */
    $pole1[$i] = $x; /* přidá se do $pole1 */
```

Děkuji za pozornost!