Exotický zápis čísel

Edita Pelantová

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,
České vysoké učení technické v Praze

SSM, únor 2016

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$

Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$

Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 5$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$

Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \ldots, 0, 1, \ldots, 5$

revoluční rok $2\overline{2}5\overline{2} \quad = \quad 2\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{2}$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \ldots, 0, 1, \ldots, 5$
revoluční rok $2\overline{2}5\overline{2} \quad = \quad 2\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{2}$

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad 1\overline{2}\,\overline{1} \text{ krát } 4\overline{3}$$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$
Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \ldots, 0, 1, \ldots, 5$
revoluční rok $2\overline{2}5\overline{2} \quad = \quad 2\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{2}$

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad 1\overline{2}\,\overline{1} \text{ krát } 4\overline{3}$$

Co ovlivňuje volbu zápisu čísel:

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: M, D, L, C, X, V, I revoluční rok $MDCCCXXXXVIII$

Desítková soustava: $0, 1, 2, \ldots, 9$ revoluční rok 1848 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \ldots, 0, 1, \ldots, 5$

revoluční rok $2\bar{2}5\bar{2} \quad = \quad 2\bar{1}\,\bar{5}\,\bar{2}$

$$79 \text{ krát } 37 \quad = \quad 1\bar{2}\,\bar{1} \text{ krát } 4\bar{3}$$

Co ovlivňuje volbu zápisu čísel:

- za jakým účelem číslo zaznamenáváme
- jednoduchost algoritmů
- technické možnosti vykonávatele (velká paměť? hodně procesorů?)

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: ve většině jazyků - neplatí to pro Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: ve většině jazyků - neplatí to pro Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, čukotština, (částečně francouština)

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: ve většině jazyků - neplatí to pro Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, čukotština, (částečně francouština)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: ve většině jazyků - neplatí to pro Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, čukotština, (částečně francouština)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre
kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: ve většině jazyků - neplatí to pro Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, čukotština, (částečně francouština)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: ve většině jazyků - neplatí to pro Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, čukotština, (částečně francouština)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

základ **12**: jazyk berom v Nigérii

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: ve většině jazyků - neplatí to pro Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, čukotština, (částečně francouština)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

základ **12**: jazyk berom v Nigérii

základ **24**: některé papuánksé jazyky z rodiny skow

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: ve většině jazyků - neplatí to pro Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, čukotština, (částečně francouština)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

základ **12**: jazyk berom v Nigérii

základ **24**: některé papuánksé jazyky z rodiny skow

základ **200**: Jorubština v kombinaci s bází 5

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: ve většině jazyků - neplatí to pro Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, čukotština, (částečně francouština)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

základ **12**: jazyk berom v Nigérii

základ **24**: některé papuánksé jazyky z rodiny skow

základ **200**: Jorubština v kombinaci s bází 5

základ **60**: Sumer

Číslovky v přirodzených jazycích

Najstálejší složka indoeurópskych jazyků:

dva, tri – two, three – duo, tre

kettő, harom – kaksi, kolme

juho- a východoázijské jazyky: číslovky jsou výpůjčky z čínštiny

používané báze:

základ **10**: ve většině jazyků - neplatí to pro Novou Guineu, Austrálii, Střední Ameriku

základ **20**: v Nepále, Čadu, mezi Inuity, v Nigérii, čukotština, (částečně francouština)

základ **4**: papuánsky jazyk kewa

základ **6**: papuánsky jazyk ndom

základ **8**: kalifornský jazyk yuki

základ **12**: jazyk berom v Nigérii

základ **24**: některé papuánksé jazyky z rodiny skow

základ **200**: Jorubština v kombinaci s bází 5

základ **60**: Sumer

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Nové Guiney nepoužívá báze ani vyšší číslovky

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Nové Guiney nepoužívá báze ani vyšší číslovky

1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Nové Guiney nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...
Extrém v amazónském jazyce piraha: chybí číslovky a také plurál

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Nové Guiney nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...
Extrém v amazónském jazyce piraha: chybí číslovky a také plurál

Tělo jako model číselné řady:

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Nové Guiney nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...
Extrém v amazónském jazyce piraha: chybí číslovky a také plurál

Tělo jako model číselné řady:
10 prstů
4 klouby zaťaté pěsti
20 prstů na rukách a nohách

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Nové Guiney nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...
Extrém v amazónském jazyce piraha: chybí číslovky a také plurál

Tělo jako model číselné řady:
10 prstů
4 klouby zaťaté pěsti
20 prstů na rukách a nohách
v grónském jazyce yimas se 19 vyjadruje: "obě ruce, skočit dole potom na noze pět druhá strana druhé dva- druhé dva"

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Nové Guiney nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, . . .
Extrém v amazónském jazyce piraha: chybí číslovky a také plurál

Tělo jako model číselné řady:
10 prstů
4 klouby zaťaté pěsti
20 prstů na rukách a nohách
v grónském jazyce yimas se 19 vyjadruje: "obě ruce, skočit dole potom na noze pět druhá strana druhé dva- druhé dva"
v jazyku kobon sa počítají postupně: prsty, zápěstí, loket, rameno, klíční kost, krk a dálej v opačné pořadí

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Nové Guiney nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...
Extrém v amazónském jazyce piraha: chybí číslovky a také plurál

Tělo jako model číselné řady:
10 prstů
4 klouby zaťaté pěsti
20 prstů na rukách a nohách
v grónském jazyce yimas se 19 vyjadruje: "obě ruce, skočit dole potom na noze pět druhá strana druhé dva- druhé dva"
v jazyku kobon sa počítají postupně: prsty, zápěstí, loket, rameno, klíční kost, krk a dálej v opačné pořadí
v některých jazycích se počítají: líce, uši, oči, nos, nosné dírky, brada, prsní kost, prsty na nohách, atd. Výjimečně i genitálie (číslovky 31, 32, 33 v jazyku yupno)

Číslovky v přirodzených jazycích

Jazyk haruai na Nové Guiney nepoužívá báze ani vyšší číslovky
1 - pan, 2 - mos, 3 - mos pan, 4 - mos mos, 5 - mos mos pan, ...
Extrém v amazónském jazyce piraha: chybí číslovky a také plurál

Tělo jako model číselné řady:
10 prstů
4 klouby zaťaté pěsti
20 prstů na rukách a nohách
v grónském jazyce yimas se 19 vyjadruje: "obě ruce, skočit dole potom na noze pět druhá strana druhé dva- druhé dva"
v jazyku kobon sa počítají postupně: prsty, zápěstí, loket, rameno, klíční kost, krk a dálej v opačné pořadí
v některých jazycích se počítají: líce, uši, oči, nos, nosné dírky, brada, prsní kost, prsty na nohách, atd. Výjimečně i genitálie (číslovky 31, 32, 33 v jazyku yupno)
Jan Pokorný: Lingvistická antropologie, Grada 2010

Poziční soustavy

Mírná exotika   základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots b - 1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Poziční soustavy

Mírná exotika   základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednozněně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 =$$

Poziční soustavy

Mírná exotika   základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednozněčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0\,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Poziční soustavy

Mírná exotika   základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots b - 1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Poziční soustavy

Mírná exotika   základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0\,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0\,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854 báze $b = -2, \ \mathcal{D} = \{0, 1\}$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots b - 1\}$.

Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednozněně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 \,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854 báze $b = -2, \ \mathcal{D} = \{0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n(-2)^n + a_{n-1}(-2)^{n-1} + \dots + a_1(-2)^1 + a_0(-2)^0$, kde $a_i \in \{0, 1\}$.

Poziční soustavy

Mírná exotika   základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednozněnčě zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 \,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2, \quad \mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854   báze $b = -2, \ \mathcal{D} = \{0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n(-2)^n + a_{n-1}(-2)^{n-1} + \dots + a_1(-2)^1 + a_0(-2)^0$, kde $a_i \in \{0, 1\}$.

$54 =$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots b-1\}$.
Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznčně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \,, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854 báze $b = -2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n(-2)^n + a_{n-1}(-2)^{n-1} + \ldots + a_1(-2)^1 + a_0(-2)^0$, kde $a_i \in \{0, 1\}$.

$$54 = 1.(-2)^6 + 0.(-2)^5 + 0.(-2)^4 + 1.(-2)^3 + 0.(-2)^2 + 1.(-2)^1 + 0.(-2)^0$$

Poziční soustavy

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \ldots, 40$ gramů ?

Poziční soustavy

Mírná exotika II   Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \ldots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava   báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Poziční soustavy

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \ldots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \ldots + a_1 3^1 + a_0 3^0$, kde $a_i \in \{\overline{1}, 0, 1\}$.

$$54 =$$

Poziční soustavy

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \ldots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \ldots + a_1 3^1 + a_0 3^0$, kde $a_i \in \{\bar{1}, 0, 1\}$.

$$54 = 3^4 + \bar{1}.3^3 + 0.3^2 + 0.3^1 + 0.3^0$$

Poziční soustavy

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \ldots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru
$x = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \ldots + a_1 3^1 + a_0 3^0$, kde $a_i \in \{\overline{1}, 0, 1\}$.

$$54 = 3^4 + \overline{1}.3^3 + 0.3^2 + 0.3^1 + 0.3^0$$

V této soustavě počítaly první ruské počítače

Výhody:
kratší zápis čísla než binárně
lze zpasat kladné i záporné čísla
rozvoj $-x$ snadno z rozvoje x,
stačí umět sčítat, odčítání stejné
vhodná abeceda na násobení

Nestandardní poziční soustavy

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \leq a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Nestandardní poziční soustavy

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \le a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Příklad báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ a abeceda $\{0, 1\}$

τ je kořeň rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

Nestandardní poziční soustavy

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \leq a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Příklad báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ a abeceda $\{0, 1\}$

τ je kořeň rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_\tau = 1 \bullet 11$$

Nestandardní poziční soustavy

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \le a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Příklad báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ a abeceda $\{0, 1\}$

τ je kořeň rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_\tau = 1 \bullet 11 \ = 10 \bullet 01$$

Nestandardní poziční soustavy

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \le a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Příklad   báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$ a abeceda $\{0, 1\}$

τ je kořeň rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_\tau = 1 \bullet 11 \ = 10 \bullet 01 \ = 10 \bullet 0011 = \ldots$$

Nestandardní poziční soustavy

Rényi 1957

Báze $\alpha > 1$ a $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \le a < \alpha\}$. Každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A};$$

Příklad báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ a abeceda $\{0, 1\}$

τ je kořeň rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_\tau = 1 \bullet 11 \ = 10 \bullet 01 \ = 10 \bullet 0011 = \ldots$$

$$(\tfrac{1}{2})_\tau = 0 \bullet (010)^\omega = 0 \bullet 010010010010010\ldots$$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ sa dá zapísať jednoznačne v tvare $x = \sum_{k=0}^{n} x_k \gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ sa dá zapísať jednoznačne v tvare $x = \sum_{k=0}^{n} x_k \gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$;

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ sa dá zapísať jednoznačne v tvare $x = \sum_{k=0}^{n} x_k \gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$;

$\gamma = i - 1$, $\gamma^2 = -2i$, $\gamma^3 = 2 + 2i$, $\gamma^4 = -4, \ldots$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ sa dá zapísať jednoznačne v tvare $x = \sum_{k=0}^{n} x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$;

$\gamma = i - 1$, $\gamma^2 = -2i$, $\gamma^3 = 2 + 2i$, $\gamma^4 = -4, \ldots$
$2 = \gamma^3 + \gamma^2$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ sa dá zapísať jednoznačne v tvare $x = \sum_{k=0}^{n} x_k \gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \gamma^k, \quad$ kde $x_k \in \mathcal{A}$;

$\gamma = i - 1$, $\gamma^2 = -2i$, $\gamma^3 = 2 + 2i$, $\gamma^4 = -4, \ldots$
$2 = \gamma^3 + \gamma^2 \quad \Longrightarrow \quad (2)_\gamma = 1100\bullet$
$(3)_\gamma = 1101\bullet$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nech $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Potom

- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ sa dá zapísať jednoznačne v tvare $x = \sum_{k=0}^{n} x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$.
- každé $x \in \mathbb{C}$ sa dá zapísať v tvare $x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$;

$\gamma = i - 1$, $\gamma^2 = -2i$, $\gamma^3 = 2 + 2i$, $\gamma^4 = -4, \ldots$
$2 = \gamma^3 + \gamma^2 \quad \Longrightarrow \quad (2)_\gamma = 1100\bullet$
$(3)_\gamma = 1101\bullet \qquad (4)_\gamma = 111010000\bullet \qquad (-1)_\gamma = 11101\bullet$

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Uvažujeme konečné α-reprezentace čísel v abecedě $\mathcal{A}$:

$$Fin_{\mathcal{A}}(\alpha) = \{x = \sum_{k \in I} x_k \alpha^k \mid I \subset \mathbb{Z},\ I \text{ konečná},\ x_k \in \mathcal{A}\}$$

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Uvažujeme konečné α-reprezentace čísel v abecedě $\mathcal{A}$:

$$Fin_{\mathcal{A}}(\alpha) = \{x = \sum_{k \in I} x_k \alpha^k \mid I \subset \mathbb{Z},\ I \text{ konečná},\ x_k \in \mathcal{A}\}$$

Hledáme algoritmus na paralelní sčítání v této soustavě, tj. algoritmus, který by přepsal v čase $\mathcal{O}(1)$

$$\sum_{k \in I_1} (\underbrace{x_k + y_k}_{\in \mathcal{A}+\mathcal{A}}) \alpha^k = \sum_{k \in I_2} \underbrace{v_k}_{\in \mathcal{A}} \alpha^k$$

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Uvažujeme konečné α-reprezentace čísel v abecedě $\mathcal{A}$:

$$Fin_{\mathcal{A}}(\alpha) = \{x = \sum_{k \in I} x_k \alpha^k \mid I \subset \mathbb{Z},\ I \text{ konečná},\ x_k \in \mathcal{A}\}$$

Hledáme algoritmus na paralelní sčítání v této soustavě, tj. algoritmus, který by přepsal v čase $\mathcal{O}(1)$

$$\sum_{k \in I_1} (\underbrace{x_k + y_k}_{\in \mathcal{A}+\mathcal{A}}) \alpha^k = \sum_{k \in I_2} \underbrace{v_k}_{\in \mathcal{A}} \alpha^k$$

$x \in Fin_{\mathcal{A}}(\alpha)$ $y \in Fin_{\mathcal{A}}(\alpha)$	$\ldots x_{j+t} \ldots x_{j+1} x_j x_{j-1} \ldots x_{j-r} \ldots$ $\ldots y_{j+t} \ldots y_{j+1} y_j y_{j-1} \ldots y_{j-r} \ldots$	$x_j \in \mathcal{A}$ $y_j \in \mathcal{A}$
$u_j = x_j + y_j$	$\ldots \underbrace{u_{j+t} \ldots u_{j+1} u_j u_{j-1} \ldots u_{j-r}} \ldots$	$u_j \in \mathcal{A} + \mathcal{A}$

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Uvažujeme konečné α-reprezentace čísel v abecedě $\mathcal{A}$:

$$Fin_{\mathcal{A}}(\alpha) = \{x = \sum_{k \in I} x_k \alpha^k \mid I \subset \mathbb{Z},\ I \text{ konečná},\ x_k \in \mathcal{A}\}$$

Hledáme algoritmus na paralelní sčítání v této soustavě, tj. algoritmus, který by přepsal v čase $\mathcal{O}(1)$

$$\sum_{k \in I_1} (\underbrace{x_k + y_k}_{\in \mathcal{A}+\mathcal{A}}) \alpha^k = \sum_{k \in I_2} \underbrace{v_k}_{\in \mathcal{A}} \alpha^k$$

$x \in Fin_{\mathcal{A}}(\alpha)$ $y \in Fin_{\mathcal{A}}(\alpha)$	$\dots x_{j+t} \dots x_{j+1} x_j x_{j-1} \dots x_{j-r} \dots$ $\dots y_{j+t} \dots y_{j+1} y_j y_{j-1} \dots y_{j-r} \dots$	$x_j \in \mathcal{A}$ $y_j \in \mathcal{A}$
$u_j = x_j + y_j$ $v_j = \phi(u_{j+t} \dots u_{j-r})$	$\dots \underbrace{u_{j+t} \dots u_{j+1} u_j u_{j-1} \dots u_{j-r}} \dots$ $\dots v_{j+t} \dots v_{j+1} v_j v_{j-1} \dots v_{j-r} \dots$	$u_j \in \mathcal{A} + \mathcal{A}$ $v_j \in \mathcal{A}$

klasická desítková soustava

$$\boxed{\begin{matrix} 3999999999999\ldots 99999999999999996 \\ 00000000000000\ldots 0000000000000000x \end{matrix}}$$

klasická desítková soustava

39999999999999...99999999999999996
00000000000000...0000000000000000x

Nutná redundance!!!

klasická desítková soustava

3999999999999...99999999999999996
0000000000000...0000000000000000x

Nutná redundance!!!

Avizienis 1961: pro báze $b \in \mathbb{N}, b \geq 3$, abecedy $\mathcal{A} = \{-a, -a+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, a\}$, kde $a \geq \frac{b}{2}$.

39999999999999...99999999999999996
00000000000000...0000000000000000x

Nutná redundance!!!

Avizienis 1961: pro báze $b \in \mathbb{N}, b \geq 3$, abecedy $\mathcal{A} = \{-a, -a+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, a\}$, kde $a \geq \frac{b}{2}$.

Pentium používá pro dělení algoritmus SRT a redundantní soustavu se základem $\beta = 4$ a pěti ciframi $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

Algorithm: Base $b = 4$, alphabet $\mathcal{A} = \{-2 - 1, 0, 1, 2\}$

Input: two finite sequences of digits (x_i) and (y_i) of $\{-2 - 1, 0, 1, 2\}$
Output: a finite sequence of digits (z_i) of $\{-2 - 1, 0, 1, 2\}$, such that

$$\sum x_i 4^i + \sum y_i 4^i = \sum z_i 4^i.$$

`for each` i `in parallel do`

0. $w_i := x_i + y_i$

1. `case` $\left.\begin{cases} w_i \geq 3 & \\ w_i = 2 & \texttt{and } w_{i-1} \geq 2 \end{cases}\right\}$ `then` $q_i := 1$

   `case` $\left.\begin{cases} w_i \leq -3 & \\ w_i = -2 & \texttt{and } w_{i-1} \leq -2 \end{cases}\right\}$ `then` $q_i := -1$

   `else` $q_i := 0$

2. $z_i := w_i - q_i 4 + q_{i-1}$

Které báze povolují paralelní sčítání?

Které báze povolují paralelní sčítání?

Nutně: $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) + \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$

Které báze povolují paralelní sčítání?

Nutně: $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) + \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$

$\Longrightarrow$ α algebraické číslo a $\#\mathcal{A} \geq \lceil \alpha \rceil$

Které báze povolují paralelní sčítání?

Nutně: $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) + \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$

$\Longrightarrow$ α algebraické číslo a $\#\mathcal{A} \geq \lceil \alpha \rceil$

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2010

Nechť báze α je algebraické číslo. Když žádný sdružený kořen není v absolutní hodnotě roven 1, pak existuje abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ taková, že ve $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze sčítat paralelně.

Které báze povolují paralelní sčítání?

Nutně: $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) + \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$

$\Longrightarrow \quad \alpha$ algebraické číslo a $\#\mathcal{A} \geq \lceil \alpha \rceil$

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2010

Nechť báze α je algebraické číslo. Když žádný sdružený kořen není v absolutní hodnotě roven 1, pak existuje abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ taková, že ve $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze sčítat paralelně.

Frougny, Heller, Pelantová, Svobodová, 2013

$$\Longleftrightarrow$$

Které báze povolují paralelní sčítání?

Nutně: $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) + \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$

$\Longrightarrow \quad \alpha$ algebraické číslo a $\#\mathcal{A} \geq \lceil \alpha \rceil$

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2010

Nechť báze α je algebraické číslo. Když žádný sdružený kořen není v absolutní hodnotě roven 1, pak existuje abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ taková, že ve $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze sčítat paralelně.

Frougny, Heller, Pelantová, Svobodová, 2013

$\Longleftrightarrow$

Příklad zlatý řez τ :
paralelně v abecede $\{-3, -2, \ldots, 3\}$

Kolik redundance je třeba na paralelní sčítání?

Kolik redundance je třeba na paralelní sčítání?

Proč překáží velká redundance?

Kolik redundance je třeba na paralelní sčítání?

Proč překáží velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: potom $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \ldots, b-1\}$ a $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, b-1, b\}$ dovolí paralelizmus (B. Parhami, 1990)

Kolik redundance je třeba na paralelní sčítání?

Proč překáží velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: potom $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \ldots, b-1\}$ a $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, b-1, b\}$ dovolí paralelizmus (B. Parhami, 1990)
- $\gamma = i - 1$: od (1992) známy algoritmus v $\mathcal{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, Muller a Nielsen (1996) dali algoritmus pre paralelní sčítání v $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, 2\}$.
  A ptali se: Může být abeceda redukována na $\{-1, 0, 1\}$?

Kolik redundance je třeba na paralelní sčítání?

Proč překáží velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: potom $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \ldots, b-1\}$ a $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, b-1, b\}$ dovolí paralelizmus (B. Parhami, 1990)
- $\gamma = i - 1$: od (1992) známy algoritmus v $\mathcal{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, Muller a Nielsen (1996) dali algoritmus pre paralelní sčítání v $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, 2\}$.
  A ptali se: Může být abeceda redukována na $\{-1, 0, 1\}$?
- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ potom každé $x \in Fin_{\mathcal{A}}(\tau)$ má nekonečně mnoho τ-reprezentací , ale $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ nepovoluje paralelizmus (Frougny, 1999)

Kolik redundance je třeba na paralelní sčítání?

Proč překáží velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: potom $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \ldots, b-1\}$ a $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, b-1, b\}$ dovolí paralelizmus (B. Parhami, 1990)
- $\gamma = i - 1$: od (1992) známy algoritmus v $\mathcal{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, Muller a Nielsen (1996) dali algoritmus pre paralelní sčítání v $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, 2\}$.
  A ptali se: Může být abeceda redukována na $\{-1, 0, 1\}$?
- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ potom každé $x \in Fin_{\mathcal{A}}(\tau)$ má nekonečně mnoho τ-reprezentací , ale $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ nepovoluje paralelizmus (Frougny, 1999)
- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, Berstel (1986) paralelné sčítání v $\{0, 1, \ldots, 12\}$

Kolik redundance je třeba na paralelní sčítání?

Proč překáží velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: potom $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \dots, b-1\}$ a $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, b-1, b\}$ dovolí paralelizmus (B. Parhami, 1990)
- $\gamma = i - 1$: od (1992) známy algoritmus v $\mathcal{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, Muller a Nielsen (1996) dali algoritmus pre paralelní sčítání v $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, 2\}$.
  A ptali se: Může být abeceda redukována na $\{-1, 0, 1\}$?
- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ potom každé $x \in Fin_{\mathcal{A}}(\tau)$ má nekonečně mnoho τ-reprezentací , ale $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ nepovoluje paralelizmus (Frougny, 1999)

- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, Berstel (1986) paralelné sčítání v $\{0, 1, \dots, 12\}$
- Milena (2010) paralelné sčítání pomocí 21-lokální funkce v abecedě $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1\}$, nebo $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomom $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze paralelizovat, potom $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomom $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze paralelizovat, potom $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad zlatý rez τ : minimální polynom $f(x) = x^2 - x - 1$,
$|f(1)| = 1$,
paralelně lze sčítat v abecede s $\#\mathcal{A} \geq 3$.

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomom $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze paralelizovat, potom $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad zlatý rez τ : minimální polynom $f(x) = x^2 - x - 1$,
$|f(1)| = 1$,
paralelně lze sčítat v abecede s $\#\mathcal{A} \geq 3$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$,
$|f(1)| = 5$,
paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$.

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomom $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze paralelizovat, potom $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad zlatý rez τ : minimální polynom $f(x) = x^2 - x - 1$,
$|f(1)| = 1$,
paralelně lze sčítat v abecede s $\#\mathcal{A} \geq 3$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$,
$|f(1)| = 5$,
paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$. Algoritmus v abecedě $\{-1, 0, 1\}$ není možný !!!!

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomom $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze paralelizovat, potom $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad zlatý rez τ : minimální polynom $f(x) = x^2 - x - 1$,
$|f(1)| = 1$,
paralelně lze sčítat v abecede s $\#\mathcal{A} \geq 3$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$,
$|f(1)| = 5$,
paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$. Algoritmus v abecedě $\{-1, 0, 1\}$ není možný !!!!
Jiná krásná abeceda $\{-1, -i, 0, i, 1\}$, na ní lze paralelně sčítat (Milena 2014).

Téma bakalářské práce

Téma bakalářské práce

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2010

Nechť báze α je algebraické číslo. Když žádný sdružený kořen není v absolutní hodnotě roven 1, pak existuje abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ taková, že ve $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze sčítat paralelně.

Téma bakalářské práce

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2010

Nechť báze α je algebraické číslo. Když žádný sdružený kořen není v absolutní hodnotě roven 1, pak existuje abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ taková, že ve $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze sčítat paralelně.

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomom $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze paralelizovat, potom $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Téma bakalářské práce

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2010

Nechť báze α je algebraické číslo. Když žádný sdružený kořen není v absolutní hodnotě roven 1, pak existuje abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ taková, že ve $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze sčítat paralelně.

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomom $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze paralelizovat, potom $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Téma bakalářské práce

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2010

Nechť báze α je algebraické číslo. Když žádný sdružený kořen není v absolutní hodnotě roven 1, pak existuje abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ taková, že ve $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze sčítat paralelně.

Frougny, Pelantová, Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomom $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\mathrm{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze paralelizovat, potom $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Úkol: odbourat některé předpoklady

Téma bakalářské práce

Téma bakalářské práce

Známe přesnou hodnotu minimální abecedy:

- pro β kořen polynomu $X^2 - aX - b$, kde $a \geq b \geq 1$
- pro β kořen $X^2 - aX + b$, kde $a - 2 \geq b \geq 1$
- pro β kořen $aX - b$, kde $a, b \in \mathbb{N}, b > a \geq 1$
- několik specifických bází

Téma bakalářské práce

Známe přesnou hodnotu minimální abecedy:

- pro β kořen polynomu $X^2 - aX - b$, kde $a \geq b \geq 1$
- pro β kořen $X^2 - aX + b$, kde $a - 2 \geq b \geq 1$
- pro β kořen $aX - b$, kde $a, b \in \mathbb{N}, b > a \geq 1$
- několik specifických bází

Úkol: přesná mez pro nějaká další β

Téma bakalářské práce

Známe přesnou hodnotu minimální abecedy:

- pro β kořen polynomu $X^2 - aX - b$, kde $a \geq b \geq 1$
- pro β kořen $X^2 - aX + b$, kde $a - 2 \geq b \geq 1$
- pro β kořen $aX - b$, kde $a, b \in \mathbb{N}, b > a \geq 1$
- několik specifických bází

Úkol: přesná mez pro nějaká další β

Naše zkušenost pro dané β: Čím menší abeceda, tím širší okno pro p-lokalní funkci.

Téma bakalářské práce

Známe přesnou hodnotu minimální abecedy:

- pro β kořen polynomu $X^2 - aX - b$, kde $a \geq b \geq 1$
- pro β kořen $X^2 - aX + b$, kde $a - 2 \geq b \geq 1$
- pro β kořen $aX - b$, kde $a, b \in \mathbb{N}, b > a \geq 1$
- několik specifických bází

Úkol: přesná mez pro nějaká další β

Naše zkušenost pro dané β: Čím menší abeceda, tím širší okno pro p-lokalní funkci.

Úkol: studovat vztah $\#\mathcal{A}$ a p

Téma bakalářské práce

Známe přesnou hodnotu minimální abecedy:

- pro β kořen polynomu $X^2 - aX - b$, kde $a \geq b \geq 1$
- pro β kořen $X^2 - aX + b$, kde $a - 2 \geq b \geq 1$
- pro β kořen $aX - b$, kde $a, b \in \mathbb{N}, b > a \geq 1$
- několik specifických bází

Úkol: přesná mez pro nějaká další β

Naše zkušenost pro dané β: Čím menší abeceda, tím širší okno pro p-lokalní funkci.

Úkol: studovat vztah $\#\mathcal{A}$ a p

Úkol: Existuje báze β, ve které lze sčítat paralelně v abecedě $\{0, 1\}$?

Domácí úkol

Algorithm: Base $b = 4$, alphabet $\mathcal{A} = \{-2 - 1, 0, 1, 2\}$

Input: two finite sequences of digits (x_i) and (y_i) of $\{-2 - 1, 0, 1, 2\}$
Output: a finite sequence of digits (z_i) of $\{-2 - 1, 0, 1, 2\}$, such that

$$\sum x_i 4^i + \sum y_i 4^i = \sum z_i 4^i.$$

for each i in parallel do

0. $w_i := x_i + y_i$

1. case $\left.\begin{cases} w_i \geq 3 & \\ w_i = 2 & \texttt{and } w_{i-1} \geq 2 \end{cases}\right\}$ then $q_i := 1$

   case $\left.\begin{cases} w_i \leq -3 & \\ w_i = -2 & \texttt{and } w_{i-1} \leq -2 \end{cases}\right\}$ then $q_i := -1$

   else $q_i := 0$

2. $z_i := w_i - q_i 4 + q_{i-1}$

Domácí úkol

Algorithm: Base $b = 4$, alphabet $\mathcal{A} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Input: two finite sequences of digits (x_i) and (y_i) of $\{-3, \ldots, 3\}$
Output: a finite sequence of digits (z_i) of $\{-3, \ldots, 3\}$, such that

$$\sum x_i 4^i + \sum y_i 4^i = \sum z_i 4^i.$$

`for each` i `in parallel do`

0. $w_i := x_i + y_i$

1. `něco, co nekouká k sousedovi`

Výhody redundancie

Výhody redundancie

- **Rychlé algoritmy** násobenia pre kryptografiu

  V binárnej sústave s abecedou $\{-1, 0, 1\}$ voľba rozvoja s minimálnou Hammingovou váhou (počet nenulových cifier).
  – non-adjacent form (Reitwiesner, Booth ...)

Výhody redundancie

- **Rychlé algoritmy** násobenia pre kryptografiu

  V binárnej sústave s abecedou $\{-1, 0, 1\}$ voľba rozvoja s minimálnou Hammingovou váhou (počet nenulových cifier).
  – non-adjacent form (Reitwiesner, Booth ...)

  Neštandardné sústavy
  – Fibonacciho soustava (Heuberger)
  – Báza $\beta > 1$ a minimalita vzhľadom k absolutnému súčtu cifier $||x|| = \sum_j |x_j|$ (Frougny & Steiner)

Výhody redundancie

- **Rychlé algoritmy** násobenia pre kryptografiu

  V binárnej sústave s abecedou $\{-1, 0, 1\}$ voľba rozvoja s minimálnou Hammingovou váhou (počet nenulových cifier).
  – non-adjacent form (Reitwiesner, Booth ...)

  Neštandardné sústavy
  – Fibonacciho soustava (Heuberger)
  – Báza $\beta > 1$ a minimalita vzhľadom k absolutnému súčtu cifier $||x|| = \sum_j |x_j|$ (Frougny & Steiner)

- **Robustný ADC** (analogovo digitálne prevodníky)
  – The golden ratio encoder (Daubechies, Yilmaz)
  – Negative beta encoder (Kohda et al).

Ako dobre násobiť?

$$x = 0 \bullet x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \quad \text{a} \quad y = 0 \bullet y_1 y_2 y_3 \ldots y_n$$

$$z = xy = 0 \bullet z_1 z_2 z_3 \ldots z_{2n}$$

Klasické násobenie čase $\mathcal{O}(n^2)$

ak sčítanie čase $\mathcal{O}(1)$, potom násobenie v čase $\mathcal{O}(n)$

Ako dobre násobiť?

$$x = 0 \bullet x_1 x_2 x_3 \dots x_n \quad \text{a} \quad y = 0 \bullet y_1 y_2 y_3 \dots y_n$$

$$z = xy = 0 \bullet z_1 z_2 z_3 \dots z_{2n}$$

Klasické násobenie čase $\mathcal{O}(n^2)$

ak sčítanie čase $\mathcal{O}(1)$, potom násobenie v čase $\mathcal{O}(n)$

Trivedi, Ercegovac (1974)

Báza $b \in \mathbb{N}$ a abeceda $\mathcal{A} = \{-1, 0, \dots, b-1\}$. Potom existuje $\delta \in \mathbb{N}$ a lineárny on-line algoritmus pre násobenie s meškaním δ.

Otvorené otázky

- Existuje báza α, v ktorej možno sčítat paralelne v abecede $\{0, 1\}$?
- Existuje on-line algoritmus pre násobenie v bázi $\alpha = i - 1$ v abecede $\{0, \pm 1, \pm i\}$?
- Čo s kvaternionmi ?

Ďakujem za pozornosť