



Detekce interakčních sil v proudu vozidel

(ANEBO BECNĚJŠÍ POHLED NA POJEM VZDÁLENOSTI V MATEMATICE)

Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

Katedra matematiky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
České vysoké učení technické v Praze

Dopravní proud jako fyzikální systém

- V *deterministických systémech* je možno na základě znalosti interakčních schémat a počátečního rozložení částic odvodit přesný časový vývoj systému (včetně přesných lokací všech částic).
- Ve *stochastických systémech* lze predikovat časový vývoj systému, polohy či rychlosti jednotlivých elementů pouze statisticky, tedy užitím pravděpodobnostního popisu.



Do které oblasti spadají dopravní systémy? Jsou to systémy deterministické nebo stochastické?

Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Přednáška pro U3V

FJFI ČVUT v Praze

11.4.2019

Historie sběru dopravních dat

Studie dopravního toku
z roku 1965
(Texas, USA)



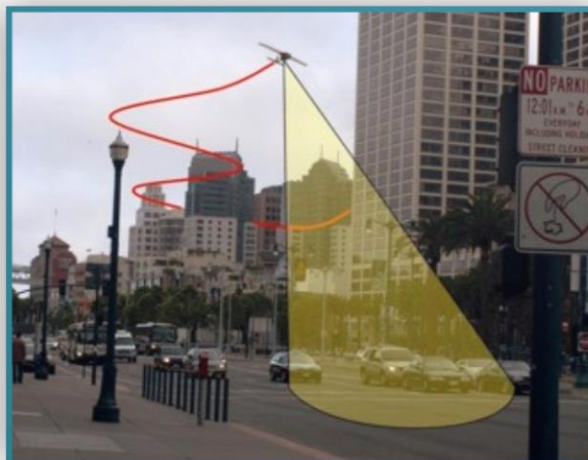
Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Přednáška pro U3V

FJFI ČVUT v Praze

11.4.2019

Dopravní monitorovací zařízení



Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Přednáška pro U3V

FJFI ČVUT v Praze

11.4.2019

Výstup z monitorovacího zařízení



Makroskopické dopravní veličiny

- délka vybraného úseku vozovky ... L
- počet vozidel ve vybraném úseku ... N
- čas, za který N vozidel projede měřicí linií ... ΔT
- hustota provozu (kolik vozidel se vyskytuje na jednom kilometru vozovky)

$$\rho = \frac{N}{L} \quad [\text{km}^{-1}]$$

- dopravní tok (kolik vozidel projede daným úsekem za jednu hodinu)

$$J = \frac{N}{\Delta T} \quad [\text{h}^{-1}]$$

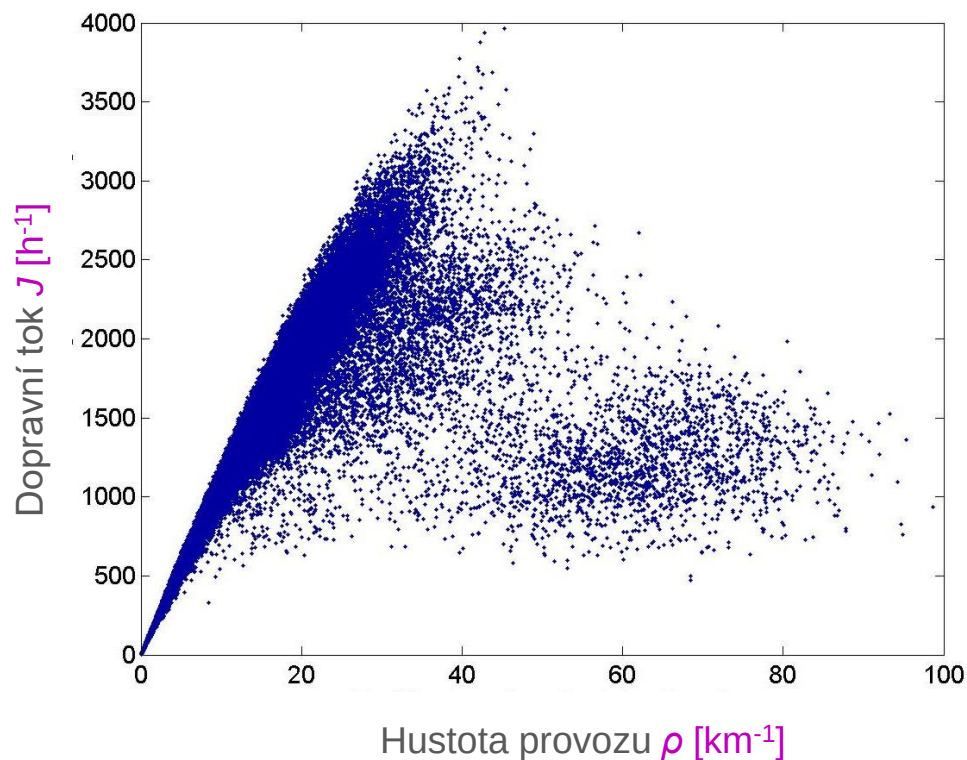
Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Fundamentální dopravní diagram

- závislost dopravního toku na hustotě provozu

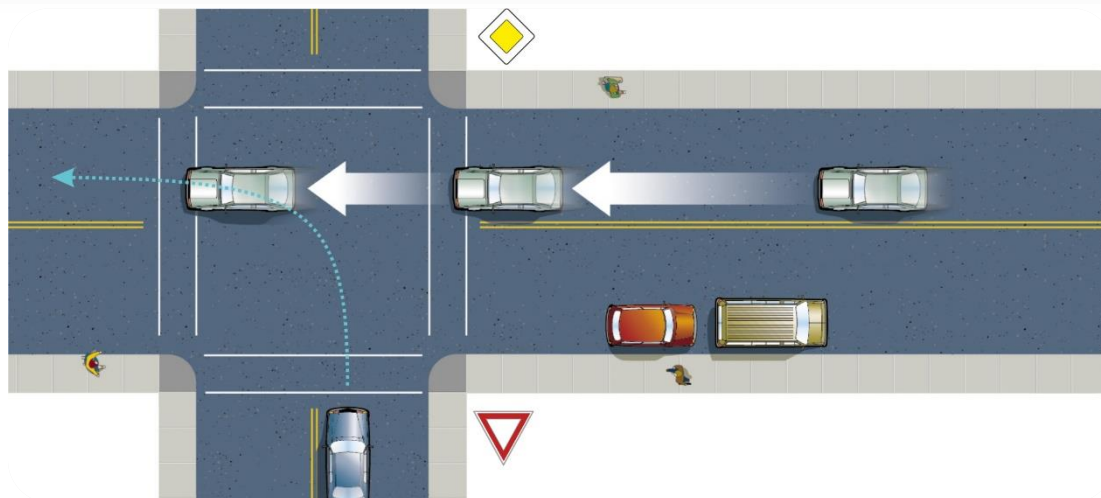
$$J = J(\rho)$$

- tři základní oblasti fundamentálního diagramu:
 - oblast volné dopravy
 - oblast synchronizované dopravy
 - Oblast dopravních kolon



Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Vzdálenost jako klíčová veličina

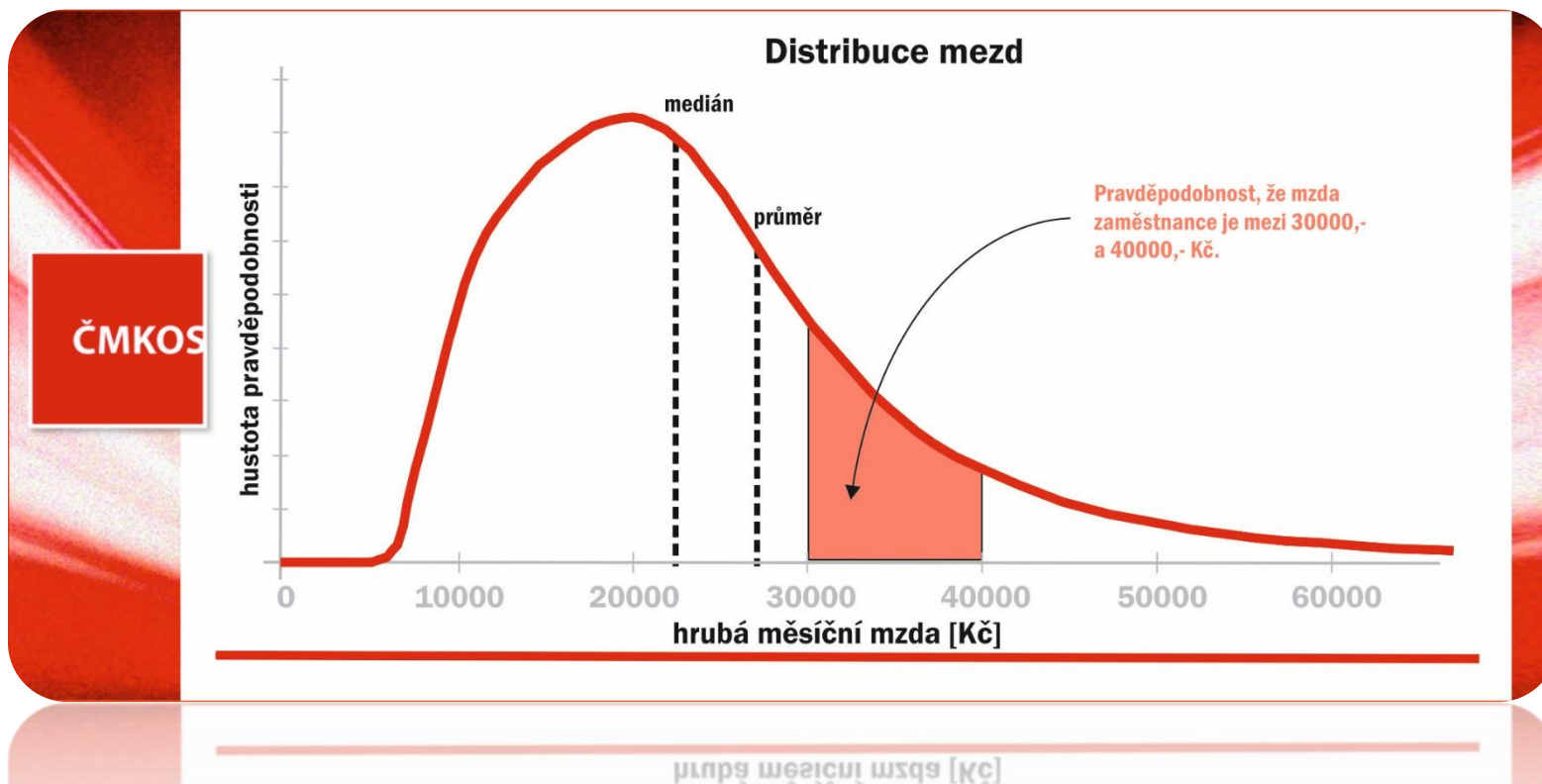


- Ve všech dopravních úlohách (zejména kapacitních) hraje odstup mezi sousedními vozidly zásadní roli
- I v těch nejjednodušších dopravních situacích je statistické rozdělení vzdáleností hlavním určujícím faktorem (propustnost daným úsekem, kapacita křižovatky, průjezdnost při odbočování z vedlejší na hlavní komunikaci,...)

Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Jak se popisují stochastické systémy?

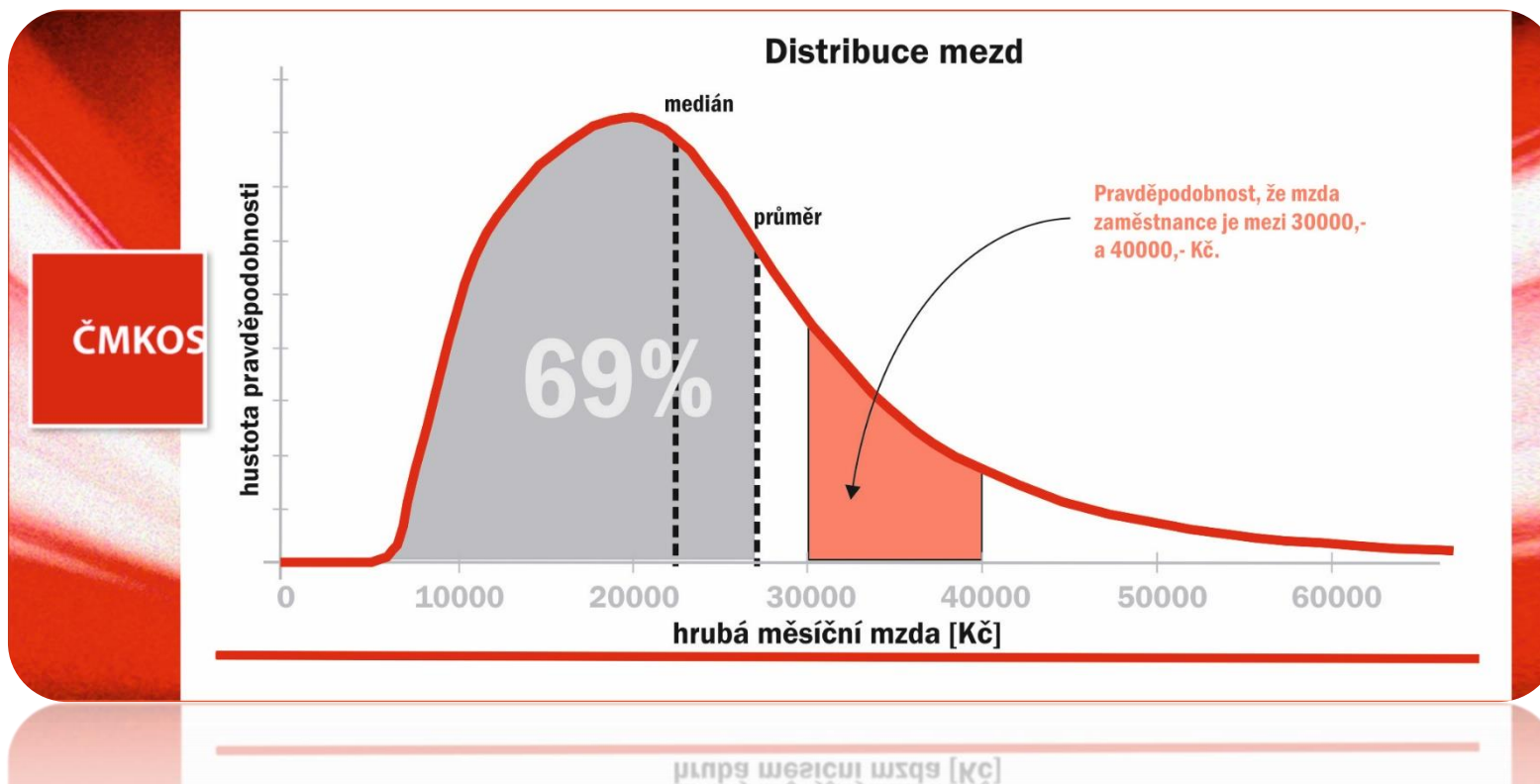
- Co je náhodná veličina a co je hustota pravděpodobnosti?



Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Jak se popisují stochastické systémy?

- Co je náhodná veličina a co je hustota pravděpodobnosti?



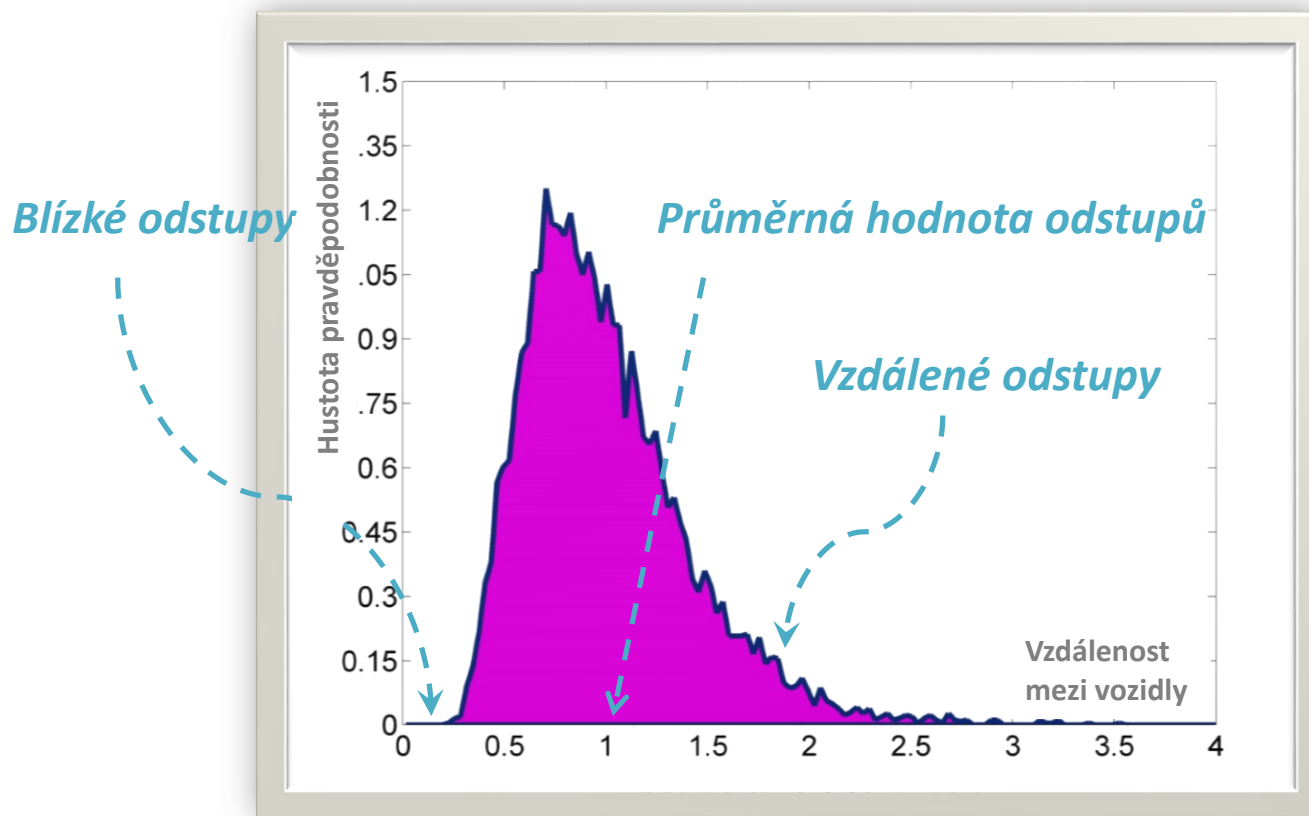
Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Přednáška pro U3V

FJFI ČVUT v Praze

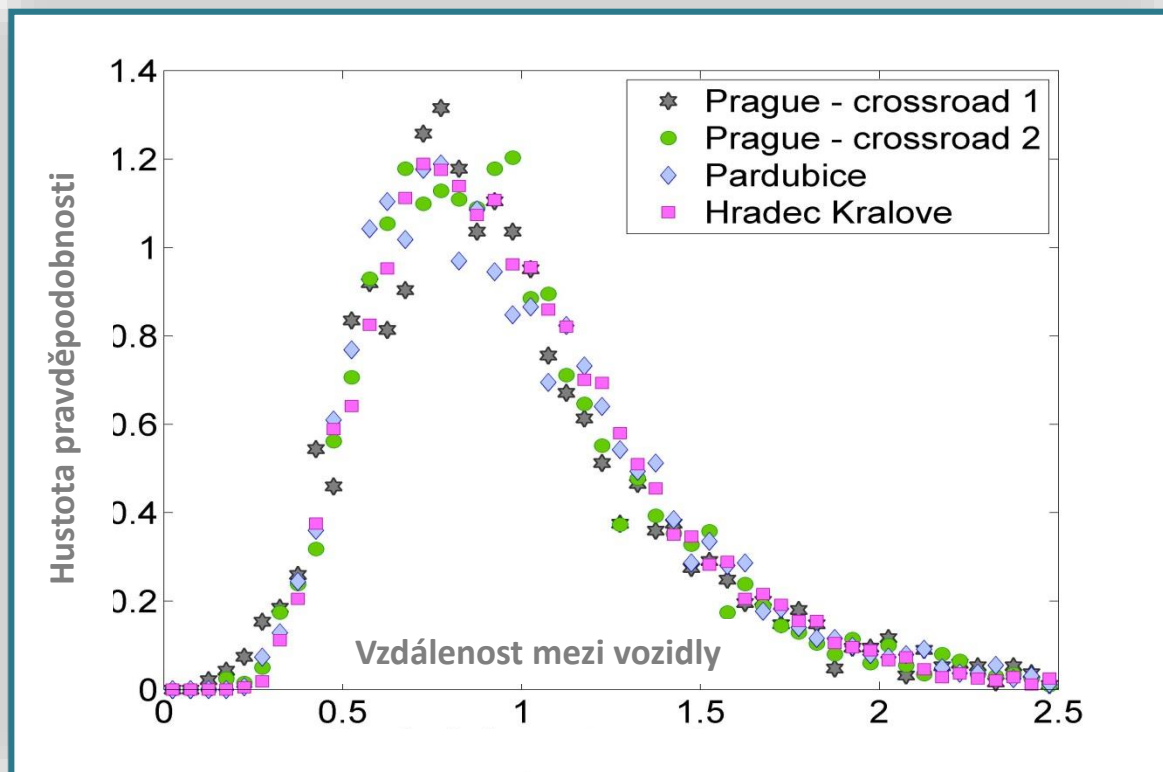
11.4.2019

Headway distribuce (dálnice)



Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Headway distribuce (křižovatky)



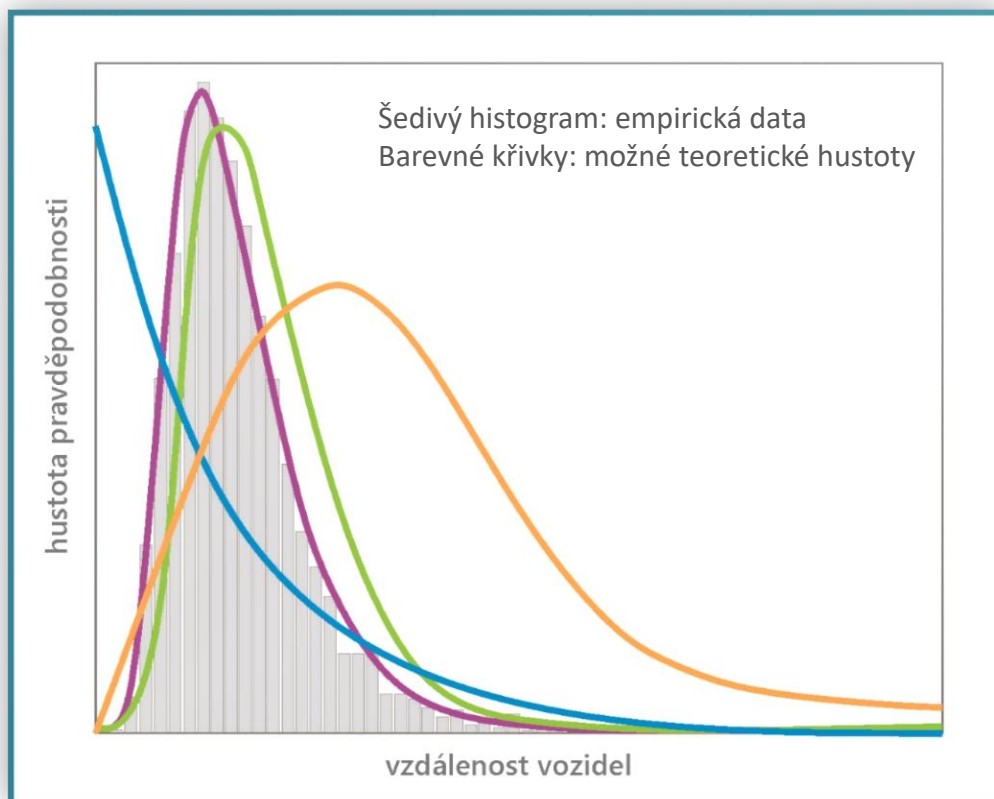
Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Přednáška pro U3V

FJFI ČVUT v Praze

11.4.2019

Jak ale headway distribuci odhadnout?



Co je vzdálenost?

Vzdálenost je zobrazení $\rho(x, y)$ z $M \times M$ do $\langle 0, +\infty \rangle$ splňující následující obecné vlastnosti:

- Symetrie: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ pro libovolnou dvojici z M
- Striktní nulovost: $\rho(x, y) = 0$ tehdy a jen tehdy, pokud $x = y$
- Trojúhelníková nerovnost: pro libovolnou trojici prvků z množiny M musí platit: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

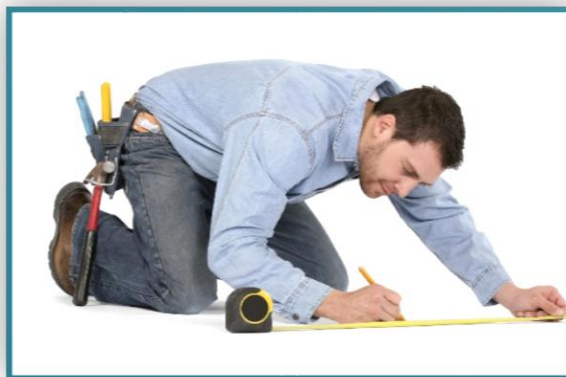


Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Euklidovská vzdálenost je jen nejprofláklejší příklad

Euklidovská vzdálenost je zobrazení z $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r$ do $\langle 0, +\infty \rangle$ zavedené známým předpisem

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^r (x_k - y_k)^2}$$



Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Atypické stanovení vzdálenosti v R^r

Síťová vzdálenost:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^r |x_k - y_k|$$

Sigma vzdálenost:

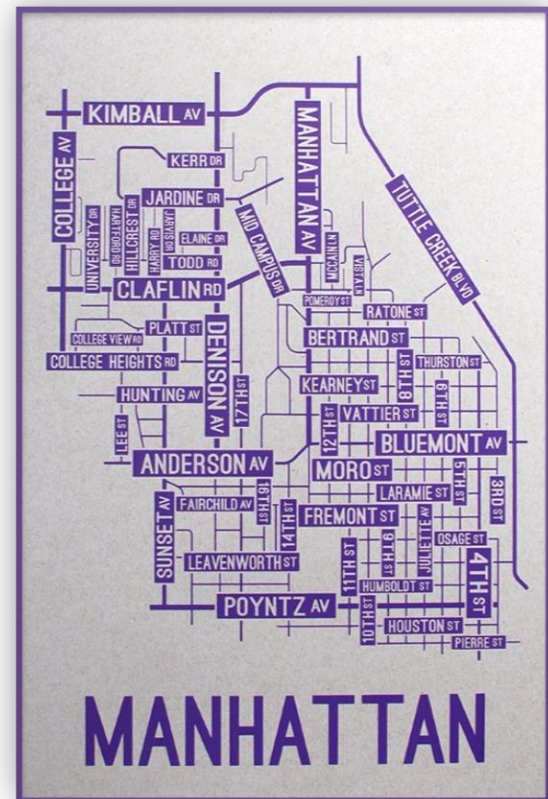
$$\rho(x, y) = \max_k |x_k - y_k|$$

Skoková vzdálenost:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^r \|x_k - y_k\|$$

Nekonvexní vzdálenost:

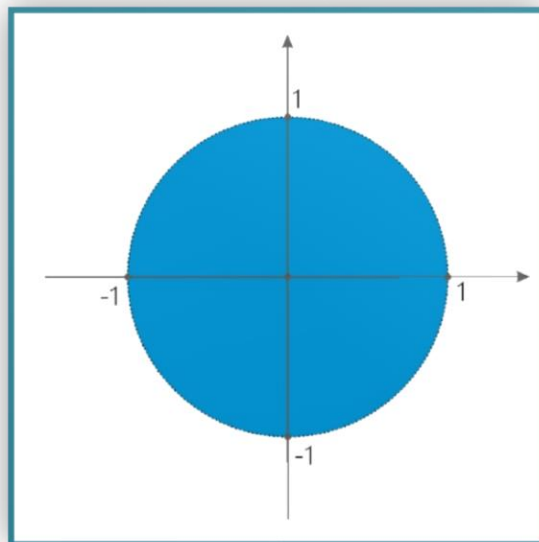
$$\rho_p(x, y) = \sum_{k=1}^r |x_k - y_k|^p, p \in (0, 1)$$



Klasické (eukleidovské) okolí bodu v R^r

Pojem okolí:

$$H_{\varepsilon}(a) = \{x \in R^r : \rho(x, a) < \varepsilon\}$$



Detekce interakčních sil v proudu vozidel

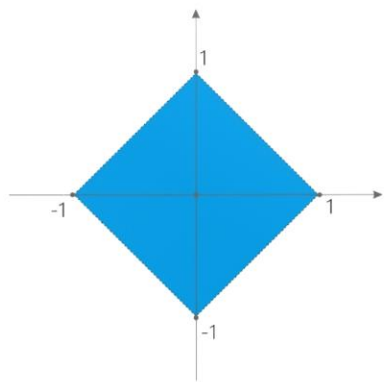
Přednáška pro U3V

FJFI ČVUT v Praze

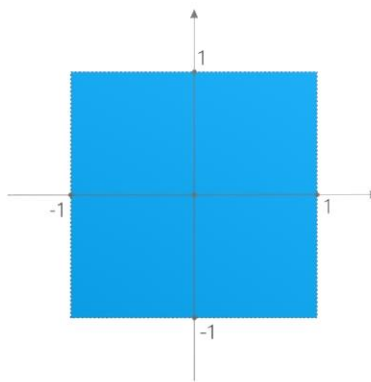
11.4.2019

Atypická okolí bodu v R^r

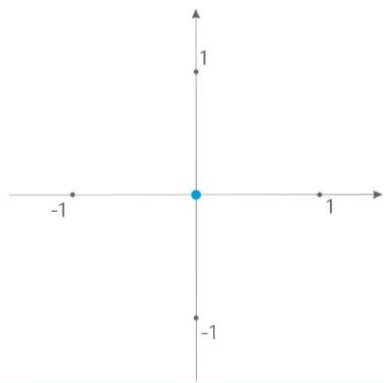
Síťová vzdálenost



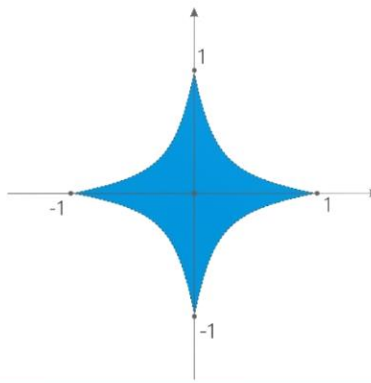
Sigma vzdálenost



Skoková vzdálenost



Nekonvexní vzdálenost

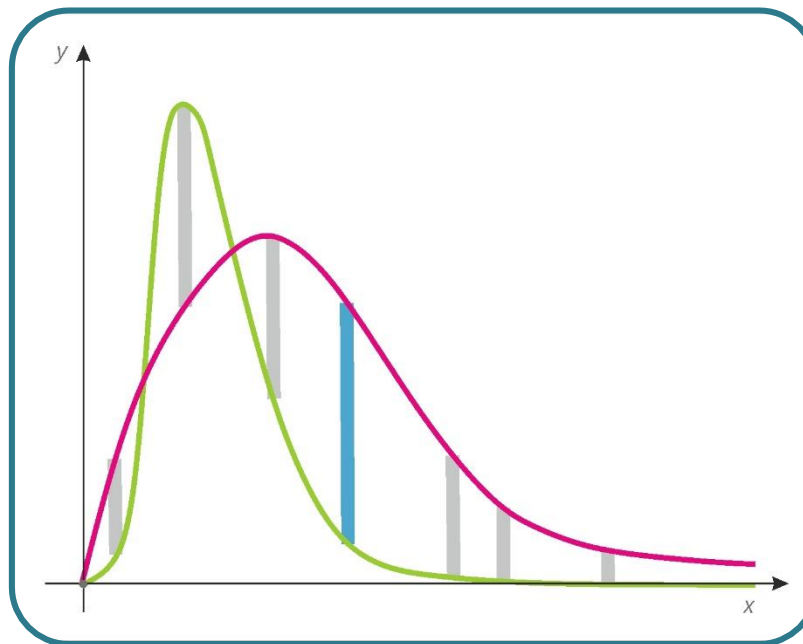


Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Ale i funkce jsou prvky jistých množin ...

Jak definovat vzdálenost funkcí $f(x)$ a $g(x)$:

- Kolmogorova vzdálenost: $\rho(f, g) = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$

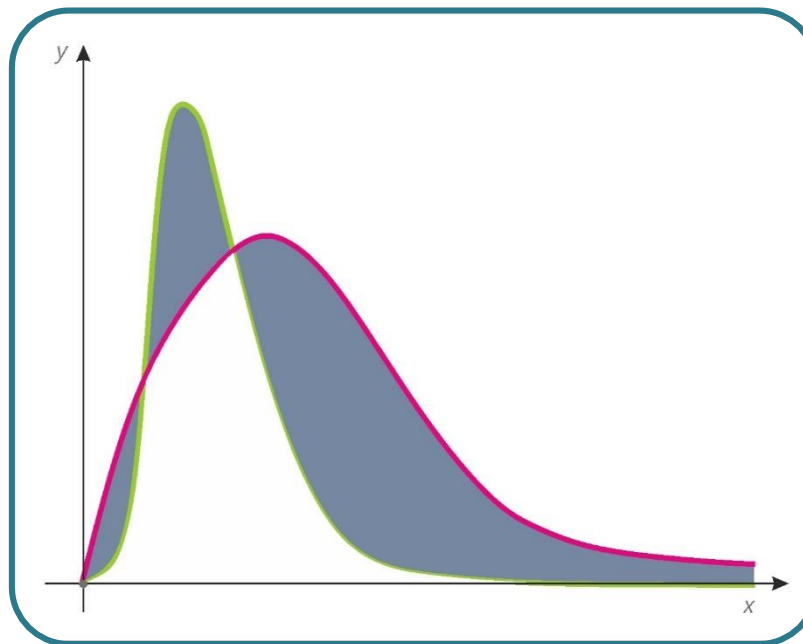


Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Ale i funkce jsou prvky jistých množin ...

Jak definovat vzdálenost funkcí $f(x)$ a $g(x)$:

- L_1 vzdálenost: $\rho(f, g) = \int_0^{+\infty} |f(x) - g(x)| dx$



Ale i funkce jsou prvky jistých množin ...

Jak definovat vzdálenost funkcí $f(x)$ a $g(x)$:

- L_2 vzdálenost: $\rho(f, g) = \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(x) - g(x))^2 dx}$
- vážená L_2 vzdálenost: $\rho(f, g) = \sqrt{\int_0^{+\infty} w(x)(f(x) - g(x))^2 dx}$
- váha $w(x) > 0$ umožňuje specifikovat, na které oblasti definičního oboru je třeba (při stanovování vzdálenosti) klást větší důraz

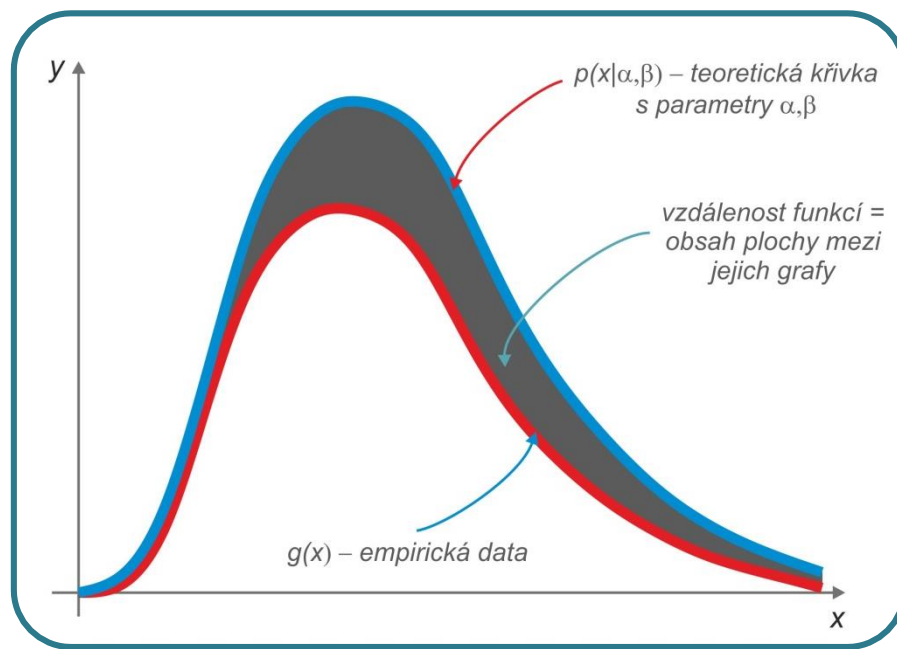
Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Přednáška pro U3V

FJFI ČVUT v Praze

11.4.2019

Jak to aplikovat v dopravě?

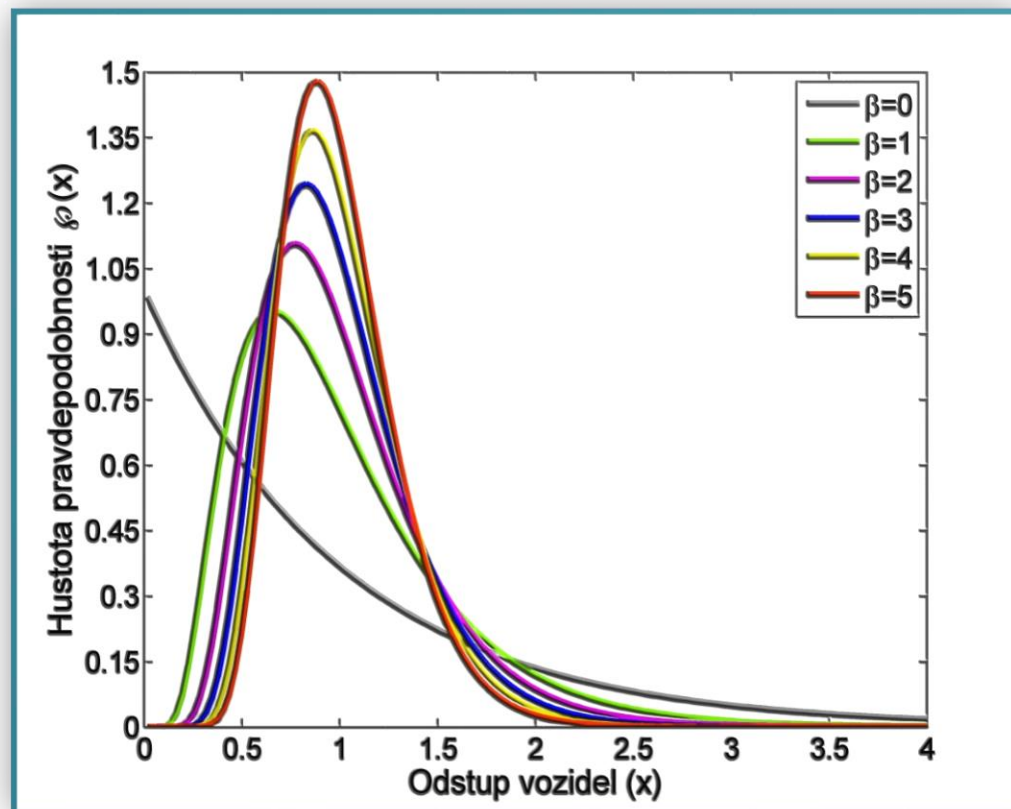


Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Matematický model

$$\wp(x) = Ae^{-\frac{\beta}{x^\alpha}} e^{-Dx}$$

- Funkce $\wp(x)$ závisí pouze na parametrech α a β .
- Hodnoty A a D jsou dopočteny na základě hodnot α a β , tak aby $\wp(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti a ve správné škále.
- Symbol x reprezentuje vzdálenost dvou za sebou jedoucích vozidel.



Proč zrovna tato třída funkcí?

$$\wp(x) = Ae^{-\frac{\beta}{x^\alpha}} e^{-Dx} \quad (x > 0) \quad (*)$$

- Tento tvar hustoty pravděpodobnosti byl odvozen pro mikroskopický dopravní model.
- Ten pracuje s tzv. sociodynamickou silou $F(x)$ závislou na vzdálenosti za sebou jedoucích vozidel x .
- Je-li tato síla tvaru

$$F(x) = -\frac{\mu}{x} + \frac{\lambda}{x^2}, \quad (\lambda, \mu > 0),$$

pak má příslušná headway distribuce právě podobu (*)

- Zde se skrývá unikátní možnost jak „nahlédnout do mozku řidiče.“

Jak ale najít optimální hodnoty parametrů?

- Realita: Z dat získáme empirickou pravděpodobnostní hustotu $g(x)$.
- Teorie: Výsledkem teorie je dvouparametrická třída teoretických hustot $p(x|\alpha, \beta)$, jež mění tvar podle volby parametrů α, β .
- Srovnání teorie a skutečnosti: vzdálenost $\rho(p, g)$
- Tato vzdálenost je ale ve skutečnosti funkcí parametrů α, β .
- Matematicky: $\chi(\alpha, \beta) := \rho(p(x|\alpha, \beta), g)$, tj. pro různé hodnoty parametrů α a β se vypočítává hodnota vzdálenosti mezi teoretickou předpovědí a reálnou distribucí.
- Poté se vyšetřuje, pro jakou dvojici parametrů (α, β) je tato odchylka nejmenší.
- *Matematicky*: jedná se o vyšetřování minima funkce $\chi(\alpha, \beta)$.

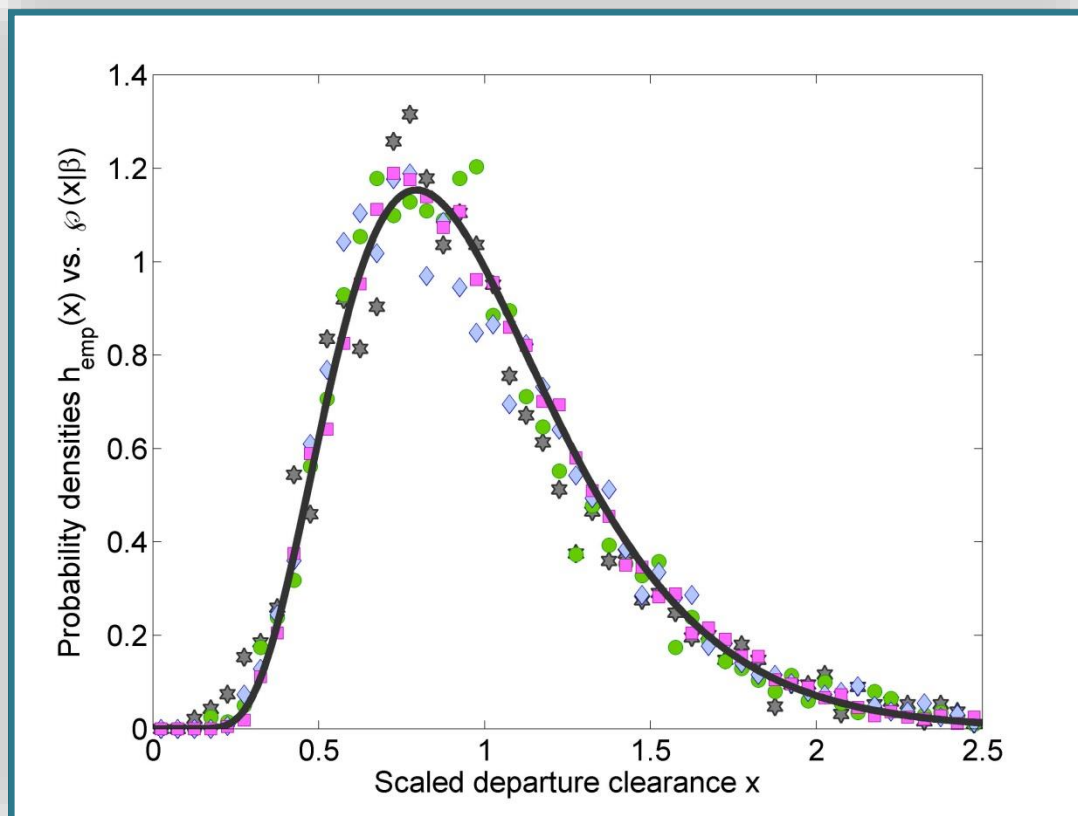
Detekce interakčních sil v proudu vozidel

Přednáška pro U3V

FJFI ČVUT v Praze

11.4.2019

A jak taková procedura dopadne?



Shrnutí

- Matematický aparát abstraktní vzdálenosti je účinným nástrojem v celé řadě praktických aplikací.
- Lze pomocí něho řešit optimalizační úlohy různého typu a odpovídat na poměrně složité otázky vzešlé z praxe.
- Jako příklad: Matematika má účinné nástroje, jak dešifrovat rozhodovací procesy, které probíhají v mozku řidiče.
- Umí také odhalit, zda se jedná o systém čistě náhodný či jde o systém se skrytými interakčními pravidly.
- ***Ale to není vše! Matematika nabízí i mnohem překvapivější aplikace:*** Lze pomocí ní například určit, kolik za sebou jedoucích řidičů spolu fakticky interaguje a na čem tento tzv. „interakční dosah“ závisí.



THE END