Můžeme věřit své vlastní kalkulačce?

Edita Pelantová, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze

U3V 14. října 2021

Reálná čísla

Racionální čísla

$$\frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{1}{6} = 0,16666666\ldots$$

Iracionální čísla

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots,$$

$$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995\ldots.$$

Používáme

$$\pi \doteq \frac{22}{7} \doteq 3,14$$

Chyba při výpočtech obsahu kruhu menší než $0,1\%$

Reklama

Otce právě narozeného syna, pana Nešetřila, upoutá reklama ve výloze banky se sloganem "Iracionálně ke štěstí". Banka nabízí rodičům, aby založili po narozené dítě účet, na který vloží e korun, tedy iracionální částku. Banka slibuje, že po každém roce odečte z účtu jednu korunu jako poplatek za vedení účtu a vynásobí zbytek počtem let od založení účtu. V den 25. narozenin banka dítěti vyplatí jmění, které pro ně rodiče našetřili.

Výsledek výpočtu

Výsledek výpočtu

- na kalkulačce mobilu značky Motorola: $p_{25} = 0,239 \times 10^{17}$

Výsledek výpočtu

Výsledek výpočtu

- na kalkulačce mobilu značky Motorola: $p_{25} = 0,239 \times 10^{17}$
- na kalkulačce v příslušenství ve Windows: $p_{25} = -0,365 \times 10^{10}$

Výsledek výpočtu

Výsledek výpočtu

- na kalkulačce mobilu značky Motorola: $p_{25} = 0,239 \times 10^{17}$
- na kalkulačce v příslušenství ve Windows: $p_{25} = -0,365 \times 10^{10}$
- na papíře s použitím tužky a hlavy: $p_{25} = 1,04$

Eulerovo číslo e

- Definice Eulerova čísla

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n .$$

Eulerovo číslo e

- Definice Eulerova čísla

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n .$$

$$b_n = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{(n-1)!} + \tfrac{1}{n!} .$$

-

Eulerovo číslo e

- Definice Eulerova čísla

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} .$$

-
-

$$a_n < b_n < e$$

Eulerovo číslo e

- Definice Eulerova čísla

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n .$$

$$b_n = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{(n-1)!} + \tfrac{1}{n!} .$$

-
-

$$a_n < b_n < e$$

-

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e$$

Srovnání posloupností

n	a_n	b_n
1	2	2
2	$2,25$	$2,5$
3	$2,370370\ldots$	$2,666666\ldots$
4	$2,441406\ldots$	$2,708333\ldots$
5	$2,48832$	$2,716666\ldots$
$\vdots$		
9	$2,581174\ldots$	$2,718281\ldots$
$\vdots$		

Eulerovo číslo e

Jiná možnost, jak se dívat na Eulerovo číslo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots .$$

Výpočet pana Nešetřila:

Eulerovo číslo e

Jiná možnost, jak se dívat na Eulerovo číslo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots .$$

Výpočet pana Nešetřila:

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1 \cdot (e - 1) &&= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \\
p_2 &= 2 \cdot (p_1 - 1) &&= 2\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots\right) \\
p_3 &= 3 \cdot (p_2 - 1) &&= 3 \cdot 2\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots\right) \\
p_4 &= 4 \cdot (p_3 - 1) &&= 4 \cdot 3 \cdot 2\left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \dots\right) \\
p_5 &= 5 \cdot (p_4 - 1) &&= 5!\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \dots\right) \\
&\vdots \\
p_{24} &= 24 \cdot (p_{23} - 1) &&= 24!\left(\frac{1}{24!} + \frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \dots\right) \\
p_{25} &= 25 \cdot (p_{24} - 1) &&= 25!\left(\frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \frac{1}{28!} + \dots\right)
\end{aligned}$$

odhad hodnoty p_{25}

- $p_{25} = 25!\left(\frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \frac{1}{28!} + \dots\right)$

odhad hodnoty p_{25}

- $p_{25} = 25! \left(\frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \frac{1}{28!} + \dots \right)$
- $p_{25} > 1 + \frac{1}{26} = \frac{27}{26} = 1,038$

odhad hodnoty p_{25}

- $p_{25} = 25! \left(\frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \frac{1}{28!} + \dots\right)$
- $p_{25} > 1 + \frac{1}{26} = \frac{27}{26} = 1,038$

součet nekonečné geometricé posloupnosti

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q} \quad \text{pro} \quad |q| < 1$$

-

odhad hodnoty p_{25}

- $p_{25} = 25!\left(\frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \frac{1}{28!} + \ldots\right)$
- $p_{25} > 1 + \frac{1}{26} = \frac{27}{26} = 1,038$

součet nekonečné geometricé posloupnosti

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad \text{pro} \quad |q| < 1$$

-
- $p_{25} = 1 + \frac{1}{26} + \frac{1}{26 \cdot 27} + \frac{1}{26 \cdot 27 \cdot 28} + \frac{1}{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29} + \ldots <$

odhad hodnoty p_{25}

- $p_{25} = 25!\left(\frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} + \frac{1}{27!} + \frac{1}{28!} + \dots\right)$
- $p_{25} > 1 + \frac{1}{26} = \frac{27}{26} = 1,038$

součet nekonečné geometricé posloupnosti

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q} \quad \text{pro} \quad |q| < 1$$

-
- $p_{25} = 1 + \frac{1}{26} + \frac{1}{26 \cdot 27} + \frac{1}{26 \cdot 27 \cdot 28} + \frac{1}{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29} + \dots <$
- $< 1 + \frac{1}{26} + \frac{1}{26 \cdot 26} + \frac{1}{26 \cdot 26 \cdot 26} + \frac{1}{26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{26}} = \frac{26}{25} = 1,04$

počítání v Maple na D platných míst

D	p_{25}
17	$-0,54848 \times 10^9$
18	$0,71967 \times 10^8$
19	$-0,55884 \times 10^7$
20	615990
21	$-4457,9$
22	$-4457,9$
23	$195,37$
24	$40,262$

D	p_{25}
25	$-6,2713$
26	$1,4842$
27	$1,0189$
28	$1,0344$
29	$1,0406$
30	$1,0399$
31	$1,0399$
atd.	atd.

počítání v Maple na D platných míst

D	p_{25}
17	$-0,54848 \times 10^9$
18	$0,71967 \times 10^8$
19	$-0,55884 \times 10^7$
20	615990
21	$-4457,9$
22	$-4457,9$
23	195,37
24	40,262

D	p_{25}
25	$-6,2713$
26	1,4842
27	1,0189
28	1,0344
29	1,0406
30	1,0399
31	1,0399
atd.	atd.

- $$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699 \ldots .$$

Můžeme věřit numerickým výpočtům?

$a_0 = 1$ and $a_1 = \frac{1}{11}$

$$a_{n+2} = \frac{34}{11} a_{n+1} - \frac{3}{11} a_n$$

Můžeme věřit numerickým výpočtům?

$a_0 = 1$ and $a_1 = \frac{1}{11}$

$$a_{n+2} = \frac{34}{11} a_{n+1} - \frac{3}{11} a_n$$

přesné řešení

$$a_n = \frac{1}{11^n}$$

Můžeme věřit numerickým výpočtům?

$a_0 = 1$ and $a_1 = \frac{1}{11}$

$$a_{n+2} = \frac{34}{11} a_{n+1} - \frac{3}{11} a_n$$

přesné řešení

$$a_n = \frac{1}{11^n}$$

tedy posloupnost je klesající a $\lim a_n = 0$.

n	$a_n^{(8)}$	$a_n^{(16)}$	a_n
1	0.0909091	0.0909091	0.0909091
2	0.00826447	0.00826446	0.00826446
3	0.000751338	0.000751314	0.000751314
4	0.0000683712	0.0000683013	0.0000683013
5	0.641880×10^{-5}	0.620921×10^{-5}	0.620921×10^{-5}
6	0.119323×10^{-5}	0.564473×10^{-6}	0.564473×10^{-6}
7	0.193760×10^{-5}	0.513158×10^{-7}	0.513158×10^{-7}
8	0.566352×10^{-5}	0.466510×10^{-8}	0.466507×10^{-8}
9	0.000016977	0.424201×10^{-9}	0.424097×10^{-9}
10	0.0000509297	0.388663×10^{-10}	0.385543×10^{-10}
11	0.000152789	0.444094×10^{-11}	0.350493×10^{-11}
12	0.000458367	0.312663×10^{-11}	0.318630×10^{-12}
13	0.00137510	0.845299×10^{-11}	0.289664×10^{-13}
14	0.00412530	0.252747×10^{-10}	0.263331×10^{-14}
15	0.0123759	0.758164×10^{-10}	0.239392×10^{-15}
50	0.619186×10^{15}	0.379320×10^{7}	0.851855×10^{-52}

Můžeme věřit numerickým výpočtům?

$a_0 = 1$ and $a_1 = \frac{1}{11} + \varepsilon$

Můžeme věřit numerickým výpočtům?

$a_0 = 1$ and $a_1 = \frac{1}{11} + \varepsilon$ např. $\varepsilon = \pm 0,0000000001$

Můžeme věřit numerickým výpočtům?

$a_0 = 1$ and $a_1 = \frac{1}{11} + \varepsilon$ např. $\varepsilon = \pm 0,0000000001$

$$a_{n+2} = \frac{34}{11} a_{n+1} - \frac{3}{11} a_n$$

Můžeme věřit numerickým výpočtům?

$a_0 = 1$ and $a_1 = \frac{1}{11} + \varepsilon$ např. $\varepsilon = \pm 0,0000000001$

$$a_{n+2} = \tfrac{34}{11} a_{n+1} - \tfrac{3}{11} a_n$$

přesné řešení

$$a_n = \frac{1}{11^n}\left(1 - \frac{11}{32}\varepsilon\right) +$$

Můžeme věřit numerickým výpočtům?

$a_0 = 1$ and $a_1 = \frac{1}{11} + \varepsilon$ např. $\varepsilon = \pm 0,0000000001$

$$a_{n+2} = \frac{34}{11} a_{n+1} - \frac{3}{11} a_n$$

přesné řešení

$$a_n = \frac{1}{11^n}\left(1 - \frac{11}{32}\varepsilon\right) + \frac{11}{32}\varepsilon\, 3^n$$

Můžeme věřit numerickým výpočtům?

$a_0 = 1$ and $a_1 = \frac{1}{11} + \varepsilon$ např. $\varepsilon = \pm 0,0000000001$

$$a_{n+2} = \tfrac{34}{11} a_{n+1} - \tfrac{3}{11} a_n$$

přesné řešení

$$a_n = \frac{1}{11^n}\left(1 - \frac{11}{32}\varepsilon\right) + \frac{11}{32}\varepsilon\, 3^n$$

tedy pro každé ε je limita $\lim a_n = \pm\infty$.

Rumpův příklad: určit pro $a = 77617.0$ a $b = 33096.0$

$$f(a,b) = 333.75\,b^6 + a^2\left(11\,a^2 b^2 - b^6 - 121\,b^4 - 2\right) + 5.5\,b^8 + 1/2\,\frac{a}{b}$$

Rumpův příklad: určit pro $a = 77617.0$ a $b = 33096.0$

$$f(a,b) = 333.75\,b^6 + a^2\left(11\,a^2b^2 - b^6 - 121\,b^4 - 2\right) + 5.5\,b^8 + 1/2\,\frac{a}{b}$$

Správná hodnota je

$$f(77617.0, 33096.0) = -0.827396059946821368141165095479816292$$

Rumpův příklad: určit pro $a = 77617.0$ a $b = 33096.0$

$$f(a,b) = 333.75\, b^6 + a^2 \left(11\, a^2 b^2 - b^6 - 121\, b^4 - 2\right) + 5.5\, b^8 + 1/2\, \frac{a}{b}$$

Správná hodnota je

$$f(77617.0, 33096.0) = -0.827396059946821368141165095479816292$$

$f_D(a,b)$ podle MAPLE, D počet platných míst:

Rumpův příklad: určit pro $a = 77617.0$ a $b = 33096.0$

$$f(a,b) = 333.75\,b^6 + a^2\left(11\,a^2b^2 - b^6 - 121\,b^4 - 2\right) + 5.5\,b^8 + 1/2\,\frac{a}{b}$$

Správná hodnota je

$f(77617.0, 33096.0) = -0.827396059946821368141165095479816292$

$f_D(a,b)$ podle MAPLE, D počet platných míst:
$f_{35}(77617.0, 33096.0) = -298.82739605994682136814116509547982$

Rumpův příklad: určit pro $a = 77617.0$ a $b = 33096.0$

$$f(a,b) = 333.75\, b^6 + a^2 \left(11\, a^2 b^2 - b^6 - 121\, b^4 - 2\right) + 5.5\, b^8 + 1/2\, \frac{a}{b}$$

Správná hodnota je

$f(77617.0, 33096.0) = -0.827396059946821368141165095479816292$

$f_D(a,b)$ podle MAPLE, D počet platných míst:
$f_{35}(77617.0, 33096.0) = -298.82739605994682136814116509547982$
$f_{36}(77617.0, 33096.0) = 21.1726039400531786318588349045201837$

Rumpův příklad: určit pro $a = 77617.0$ a $b = 33096.0$

$$f(a,b) = 333.75\,b^6 + a^2\left(11\,a^2 b^2 - b^6 - 121\,b^4 - 2\right) + 5.5\,b^8 + 1/2\,\frac{a}{b}$$

Správná hodnota je

$$f(77617.0, 33096.0) = -0.827396059946821368141165095479816292$$

$f_D(a,b)$ podle MAPLE, D počet platných míst:

$f_{35}(77617.0, 33096.0) = -298.82739605994682136814116509547982$

$f_{36}(77617.0, 33096.0) = 21.1726039400531786318588349045201837$

$f_{37}(77617.0, 33096.0) = -0.827396059946821368141165095479816292$

Rumpův příklad: určit pro $a = 77617.0$ a $b = 33096.0$

$$f(a,b) = 333.75\,b^6 + a^2\left(11\,a^2 b^2 - b^6 - 121\,b^4 - 2\right) + 5.5\,b^8 + 1/2\,\frac{a}{b}$$

Správná hodnota je

$f(77617.0, 33096.0) = -0.827396059946821368141165095479816292$

$f_D(a,b)$ podle MAPLE, D počet platných míst:
$f_{35}(77617.0, 33096.0) = -298.82739605994682136814116509547982$
$f_{36}(77617.0, 33096.0) = 21.1726039400531786318588349045201837$
$f_{37}(77617.0, 33096.0) = -0.827396059946821368141165095479816292$
$f_{38}(77617.0, 33096.0) = -0.8273960599468213681411650954798162920$

Rumpův příklad: určit pro $a = 77617.0$ a $b = 33096.0$

$$f(a,b) = 333.75\, b^6 + a^2 \left(11\, a^2 b^2 - b^6 - 121\, b^4 - 2\right) + 5.5\, b^8 + 1/2\, \frac{a}{b}$$

Správná hodnota je

$f(77617.0, 33096.0) = -0.827396059946821368141165095479816292$

$f_D(a,b)$ podle MAPLE, D počet platných míst:
$f_{35}(77617.0, 33096.0) = -298.82739605994682136814116509547982$
$f_{36}(77617.0, 33096.0) = 21.1726039400531786318588349045201837$
$f_{37}(77617.0, 33096.0) = -0.827396059946821368141165095479816292$
$f_{38}(77617.0, 33096.0) = -0.8273960599468213681411650954798162920$
Puzzle:
NO digit is correct at $D = 36$ while *ALL* digits are correct at $D = 37$.

Děkuji za pozornost